ARITHMETICÆ IN NVMERIS ET SPECIEBVS INSTITVTIO:

QVAE TVM LOGISTICAE, TVM ANALYTICAE atque adeo totius Mathematicæ quasi clavis est.

AD INCVDEM REVOCATA, & de nouo limata

EDITIO SECVNDA;

Cui accesserunt Tractatus sequentes.

De numerosa resolutione omnium æquationum quarumcumque adfectarum.
De Anatocismo siue de fœnore composito.
Regula falsi demonstrata.
Elementum decimum Euclidis demonstratum.
De corporibus regularibus Tractatus.

Authore GVILIELMO OVGHTRED.

LONDINI,
Apud THOMAM HARPER, sumptibus RICARDI VVHITAKER, in cuius ædibus prostant propè Cœmeterium Paulinum.

CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA.

Cap. I. *De Notatione.*

1. TAbella admodum utilis, non modò pro numerorum Notatione, quam primâ facie exhibet; sed etiam in omni computatione per numeros tum communes, tum figuratos, tum artificiales, qui vulgò Logarithmi dicuntur.

Integri										Partes									
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	&c.
M	M	M	M	M	M	M	C	X	I	X	C	M	M	M	M	M	M	M	
M	M	M	M	C	X	I							X	C	M	M	M	M	
M	C	X	I													X	C	M	

2. In hâc tabellâ numeri superiores sunt Indices sive exponentes terminorum utrinque ab unitate continuè proportionalium, affirmativi in integris, negativi in partibus: Estque progressio in decuplâ ratione versus sinistram, & in subdecuplâ versùs dextram, sicut literæ numerales subscriptæ ostendunt. Est igitur pro-

greſſio ab unitate in integris, 1, 10, 100, 1000, 10000: Et in partibus, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$: Et ſic in infinitum.

3. Atque hoc modo in omni aliâ Progreſſione, terminis ab unitate quacunque ratione ſive creſcentibus, ſive decreſcentibus, Indices ſui erunt adponendi.

4. Tabellam quidem in decimali ratione ordinavi, tum ut numerorum quorumcunque (ſive Integri ſint, ſive partes, ſive mixti) valores per gradus & periodos æſtimentur: tum quia Logiſtica hæc decimalis ſexagenariâ, in computationibus Aſtronomicis multò facilior eſt atque concinnior. Hoc planè perſpexit, quicunque is fuit, qui primus canonem Sinuum à ſemidiametro 60, ad I cum circulis annexis, revocavit. Utinam idem etiam in aliis canonibus fierit.

5. Partes decimales ſcribuntur in unâ lineâ cum integris, diſtinguuntur autem lineolâ rectangulari, quæ idcircò ſeparatrix dicitur. Et quemadmodum in integris, quilibet ab unitatum loco gradus augetur versùs ſiniſtram decuplando: ſic in partibus decimalibus, quilibet ab unitatum loco gradus minuitur verſus dextram ſubdecuplando.

6. Partes decimales denominationem ſuam ſortiuntur à loco figuræ ſuæ ultimæ: ut 0|5 ſunt 5 decimæ partes: 0|56 ſunt 56 centeſimæ partes: 0|056 ſunt 56 milleſimæ partes, & ſic de reliquis omnibus.

7. Circuli ante integros, vel poſt partes decimales nihil valent: at verò poſt integros, & ante partes decimales (hoc eſt utrinque lineæ ſeparatrici proximi) vim

ſuam

ſuam retinent : nam gradus conſtituunt quibus figurarum valores cenſentur: ut, 0005, ſignificant tantummodo 5 : & 0|500, 5 decimæ partes. as

8. Quare in partibus decimalibus ſcribendis, linea ſeparatrix ſemper adponatur ; & loci, ſi qui ſunt, vacui, circulis ſuppleantur : ut 0|00005 ſunt 5 centies mileſimæ partes.

9. Signum addendi ſive adfirmationis eſt + plus, ſive pl: ut 34, vel + 34.

10. Signum minuendi ſive negationis eſt — minus, ſive mi : ut — 34, negantur omninò eſſe.

11. Pertinet autem ſignum ad magnitudinem ſequentem, cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non eſt præfixum ſignum negationis, intelligitur eſſe adfirmata, & habere ſignum +, licet non ſit expreſſum.

12. Et nota quod ſignis + & - utor, quando ſimplex magnitudo adfirmatur vel negatur de ſimplice: ſignis autem pl : & mi, quando magnitudo compoſita adfirmatur vel negatur de ſimplice, vel ſimplex de compoſitâ.

13. Magnitudines denotari poſſunt vel numeris menſuram ipſarum ſignificantibus, vel etiam ſpeciebus: ut linea longa ſeptem uncias, deſignatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam, A, B, C, &c; vel per duas literas terminis lineæ adſcriptas, AB, BC, CD, &c pro libitu: modò memoriâ teneas pro quâ magnitudine ſpecies quælibet ſtatuitur.

14. Specioſa hæc Arithmetica arti Analyticæ (per quam ex ſumptione quæſiti, tanquam noti, in veſtiga-

tur quæſitum) multo accommodatior eſt, quam illa numeroſa. Nam in numeroſâ, numeri à novo, quem proferunt, ita abſorbentur, ut penitus diſpareant, nec ullum ſui veſtigium relinquant: At in ſpecioſâ, permanent ſpecies ſine aliquâ mutatione, ſpecimen exhibentes totius operationis: unde non ſolùm in quæſiti notitiam ducunt, ſed etiam Theorema generale pro ſolutione conſimilium quæſtionum, in aliis magnitudinibus datis, edocent.

Cap. II. *De Additione.*

1. NUmerus inventus per Additionem, dicitur Summa, vel Aggregatum. Ut 3 & 7 conſtituunt 10.

2. Additio incipit ad dextram, & ſummas ſingulorum locorum particulares inventas ſubſcribit, in locis ſuis propriis.

3. In Additione omnes numeri dati ſimul æquantur Summæ.

Exempla Additionis.

79403
8956
67293
5087
160739

3794	236
584	3
948	08
4720	7439
48	5
10094	8599

l.	s.	d.
17	13	4
9	16	7
238	09	6
70	00	10
48	10	3
384	10	6

4. Additio

4. Additio speciosa conjungit omnes magnitudines datas servatis signis

ad	3A	A	5 A	3 A	A
adde	A	-A	—3 A	—5 A	E
Summa	3 A + A	A-A	5 A - 3 A	3 A - 5 A	A+E
hoc est	4 A	o	2 A	— 2 A	

ad	A + B	A+B	Sic in Indicum Additione 3|3, 2|2, 1|1
adde	A - B	A-C	
Summa	2 A	2 A + B-C	

Cap. III. *De Subductione.*

1. NUmerus inventus per Subductionem dicitur Reliquus, vel Differentia, vel Excessus. Ut è 7 tolle 3, restat 4.

2. Subductio incipit ad dextram, & differentias singulorum locorum particulares inventas subscribit, in locis suis propriis.

3. In Subductione, numerus subducendus, unà cum differentiâ, æquatur numero ex quo.

Exempla Subductionis.

347206836	3794,236	l.	s.	d.
6807592	947,08	17	13	4
		9	16	7
340399244	2847,156	7	16	9

 4. Sub-

4. Subductio ſpecioſa conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus ſignis magnitudinis ſubducendæ.

Ex- 4 A	3 A	5 A	A
tolle A	5 A	- 3 A	E
Reſtat 4 A-A	3 A-5 A	5 A+3 A	A-E
hoc eſt 3 A	-2 A	8 A	

Ex- A	A	Sic in Indi-	3	$\bar{3}$
tolle B+C	B-C	cum ſub-	$\bar{2}$	2
Reſtat A-B-C	A-B+C	ductione.	5	$\bar{5}$

CAP. IV. *De Multiplicatione.*

1. NUmerus inventus per Multiplicationem, dicitur Factus, vel Productus, vel Rectangulum, vel Planum. Nam unus è numeris propoſitis habetur pro longitudine, alter pro latitudine: & numeri propoſiti dicuntur Factores atque Latera. Maxima quippe binarum magnitudinum poteſtas, eſt figura ex ipſis compoſita, cujus anguli ſunt recti, & latera parallela.

2. Multiplicatio incipit ad dextram, & ſingulas figuras unius numeri dati, in ſingulas alterius figuras ducit. & factos demum, habitâ locorum ratione, in unam ſummam colligit. Et ſi partes decimales numeris propoſitis ſint admixtæ, è toto facto tot locos lineâ ſeparatrice abſcindit, quot ſunt loci partium in utroque

utroque factore. Nam in Multiplicatione Index cujusque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum multiplicatæ & multiplicantis, sic 58,73 ductus in 600, facit 35238. Nam Index figuræ 6 in 600, est 2: & Index ultimæ figuræ 3 in 58,73 est $\bar{2}$, addantur Indices 2 & $\bar{2}$, extabit 0 pro Indice ultimæ figuræ facti 35238: quæ idcircò pertinet ad locum unitatum. Et consimilis reliquarum figurarum in facto censura gradualis institui poterit.

3. Si è numeris propositis, unus, vel uterque, adjunctos habeat ad dextram circulos: omissis circulis, fiat ipsorum numerorum Multiplicatio: & facto demùm tot insuper integrorum loci accenseantur, quot sunt omissi circuli in utroque factore.

4. In Multiplicatione est, ut unitas, ad unum è factoribus: Sic alter è factoribus, ad factum. Ut si ducatur 4 in 6 fiet 24: Est igitur 1.4 :: 6.24: vel 1.6 :: 4.24.

Exempla Multiplicationis.

```
   4576        580,34
    892         47,5
 -------     ---------
   9152       290170
  41184      406238
 36608      232136
 -------     ---------
 4081792     27566,150
```

```
     358        58,73
     600         600
  -------     -------
  214800       35238
```

 5. Con-

5. Contractio Multiplicationis, in Logiſticâ valdè utilis, ſic eſt. Si inſtituto tuo ſufficiat habere factum non integrum, ſed multatum aliquot ex ultimis figuris: ſtatues unitatis locum minoris numeri, ſub illâ figurâ majoris, cujus Index æqualis ſit numero figurarum, vel abſcindendarum in integris vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, ſub numero majore ordine inde contrario. Tum in multiplicando incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ eſt ſupra eam figuram minoris, quâ multiplicatur: habitâ tamen ratione incrementi, quod ex ſubſequentibus figuris majoris numeri ſuppeditatur. Hujus compendii caſus ſunt quatuor.

Caſus I. Si velis factum habere purum à partibus: Statues unitatis locum minoris ſub unitatis loco majoris. Ut in exemplo, ubi 246,914 ductus in 35,27 producit 8708 integros, abſciſſis omnibus partibus decimalibus.

```
   246,914
     72,53
  --------
   7407
   1235
     49
     17
  --------
   8708
```

Caſus II.

Casus II. Si velis habere factum cum locis aliquot partium puta quatuor: Statuesq́ unitatis locum minoris numeri sub quarto loco partium majoris. Ut in priore exemplo, factus erit 8708|6568 mixtus cum quatuor locis partium.

246|914
72|53
74074200
12345700
493828
172840
8708|6568

Casus III. Si velis factum multatum aliquot locis integrorum, puta quinque: statues unitatis locum minoris numeri loco quinto ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo, ubi 80902 sinus graduum 54 multiplicandus est per 39875 sinum maximæ declinationis 23° 30: prodibit 32269 sinus declinationis solis ad ♉ 24°.

80902
57893
24271
7281
647
96
4
32269

Casus IV. Si velis factum multatum locis integrorum, puta quinque, reparari aliquot locis partium, puta quatuor. Quia 5 + $\bar{4}$ = 1: Statues unitatis locum minoris numeri uno loco ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo ubi sinus 42262 multiplicatur per 0|0064, ita ut abscissis à facto quinque figuris ultimis, restituantur quatuor loci partium: Factus erit 0|0027.

42262
46000
25
2
0|0027

6. Multiplicatio *ſpecioſa* connectit utramque magnitudinem propoſitam cum notâ in vel ×: vel plerumque abſque notâ, ſi magnitudines denotentur unicâ literâ. Et ſi ſigna ſint ſimilia, producta magnitudo erit adfirmata: ſin diverſa, negata. Effertur autem per in.

Et nota, quòd A in A, ſive A × A, ſive A A, eſt Aq. AAA ſive AqA, eſt Ac. AAAA, ſive Aq Aq, ſive AcA, eſt Aqq. AAAAA, ſive AcAq, ſive AqqA, eſt Aqc. AAAAAA, ſive Ac Ac, ſive Aqq Aq, ſive AqcA, eſt Acc, &c. Nam poteſtas quælibet ſuperior fit ex duabus inferioribus, quarum dimenſiones ſimul æquantur numero dimenſionum ſuperioris. Quot autem magnitudines ſunt quæ multiplicantur, totidem ſunt dimenſiones.

Duc. A in E	A+E B	A−E B	A+E+I Z	B+1 A
fiet AE	BA+BE	BA−BE	ZA+ZE+ZI	BA+A

Duc. 3A in 2A	AE A	AE AE	A+E A+E	A+E A−E
fiet 6Aq	AqE	AqEq	Aq+AE +AE+Eq Aq+2AE+Eq	Aq+AE −AE −Eq Aq−Eq

Ad hunc etiam modum Multiplicatio fiet, ſi magnitudines conſtent binis literis. Ut ſi latus AB

AB + CD multiplicandum ſit in ſe, producetur quadratum ABq + 2AB × CD + CDq.

Cap. V. *De Diviſione.*

1. NUmerus inventus per Diviſionem dicitur quotus, vel etiam Parabola: quia oritur ex adplicatione numeri plani ad longitudinem datam, ut inveniatur latitudo congrua. Et ſi numerus ad numerum adplicetur cum lineolâ interjectâ, oſtendit quod numerus ille ſuperior dividendus ſit per inferiorem, ad quem adplicatur: ut $\frac{12}{4}$ & $\frac{5}{12}$.

2. Diviſio incipit ad ſiniſtram: & poſtquam ex dividendo ſufficientem diviſori dividuum diſtinxerit, & ſub ipſo diviſorem ſubſcripſerit, vel ſaltem ſubſcriptum cogitaverit: ſingulas figuras diviſoris ex ſingulis ipſius dividui figuris ſupra ſtantibus, æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: Tum diviſore per quotum inventum multiplicato, factoque ablato ex dividuo, diviſorem in locum proximè ſequentem promovet, novamque uti prius diviſionem inſtituit; donec totum dividendum percurrerit. Quilibet autem quotus particularis inventus, ejuſdem debet eſſe loci, ſive gradus, cujus eſt figura dividendi, quæ ſtat, vel cogitatur ſtare ſupra unitatis locum diviſoris. Nam in Diviſione, Index cujuſque particularis figuræ Quoti, invenitur tollendo Indicem figuræ dividentis ex Indice figuræ diviſæ. Sic 171|4 diviſus per 857, dat 0|2 pro Quoto. Index enim primæ figuræ dividuæ 17 eſt 1; & Index primæ

primæ figuræ divisoris 8 est 2: Tollatur 2 ex 1, restabit 1 pro Indice primæ figuræ. quæ idcircò pertinet ad locum primum partium decimalium.

3. Et si divisor adjunctos sibi habeat ad dextram circulos; omissis circulis, & abscissis totidem ultimis figuris dividendi, in numeris reliquis fiat divisio. In fine autem divisionis restituendi sunt, tum omissi circuli, tum figuræ abscissæ.

4. In Divisione est, ut Divisor ad unitatem, sic dividuus ad Quotum: vel ut dividuus ad divisorem, sic Quotus ad unitatem. Ut diviso 24 per 6, quotus erit 4: Est igitur 6.1::24.4: Item 24.6::4.1.

5. Si magnitudo facta sit ex duabus magnitudinibus, una ex iis ipsam per alteram metietur.

6. In Multiplicatione, atque Divisione, unitas nihil mutat.

7. Si numerus numerum multiplicet, idemque factum dividat, nihil fit. Nam quod Multiplicatio conficit, Divisio dissolvit. Quare in adplicatione magnitudinis ad magnitudinem, si eadem magnitudo sit tum supra lineam, tum infra, expungatur utrobique.

Exempla

Exempla Divisionis.

12
892137
297) 187135075 (630084$\frac{127}{297}$
178213768
892118
2901
435257
580,34) 27566150 (47,5
23213680
406237
2901

187135075 (630084$\frac{127}{297}$
297
1782
893
297
891
2507
297
2376
1315
297
1188
127

6,000)4320|765
720,1275

8. Aliquando numerus aliquis dividi postulatur per numerum irrationalem, vel infinitum, sive integer sit, sive mixtus. Atque in hoc casu, sumptis, quot opus est, è primoribus figuris divisoris pro primo divisore, per ipsas divides numerum propositum : deinde pro singulis particularibus divisionibus subsequentibus, divisorem minues amputando versus sinistram totidem ultimas figuras, donec quotum satis amplum inveneris : ut si dividantur 467023 per numerum infinitum 357,0926425 Quotus erit 1307,80 ferè.

```
                 17
                303
               2803
              109930
357,0926425 )467023 (1307,80—
              357093
              107127
               2500
               286
```

Pulcherrima hæc est Divisionis contractio, & maximi usus in computationibus Astronomicis. Ut si per 137638 dividendus sit 126223 ductus in sinum totum, hoc est auctum quinque circulis : Appones tantummodò unum circulum : & pro quatuor reliquis minues divisorem. Ut

137638) 1262230 (91707.

9. Divi-

9. Diviſio *ſpecioſâ* ſtatuit magnitudinem dividentem ſub dividendâ, cum lineolâ interjectâ: tum conſiderat an magnitudo aliqua utramque communitèr multiplicaverit; atque ipſam utrobique expungit. Diviſio etiam in iiſdem dat +, in diverſis –: effertur autem per ad.

Adplica	AE	BAc	BA+A	BA–CA	6Aq	ſcil. $\frac{2 \times 3 Aq}{3 A}$
ad	A	Aq	A	B–C	3A	
Oritur	E	BA	B+1	A	2A	2A

Cap VI. *De Proportione.*

1. SI è quatuor numeris datis, primus ita ſe habeat ad ſecundum, ut tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri eſſe proportionales. Numerorum autem ad ſe invicem habitudo invenitur dividendo antecedentem per conſequentem: ut 31 ad 7 ratio eſt $4\frac{3}{7}$, hoc eſt quadrupla ſupertripartiens ſeptimas.

2. Quare ſi numerus duos numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales. Et ſi numerus duos numeros dividat, quoti erunt diviſis proportionales. vij: 18 Eucl:

Ut $4 \times \begin{cases} 7. & 28 \\ 9. & 36 \end{cases}$ & 4) $\begin{matrix} 28(7. \\ 36(9. \end{matrix}$ Item $A \times \begin{cases} B. & BA. \\ C. & CA. \end{cases}$ &

A) $\begin{matrix} BA. & B \\ CA. & C. \end{matrix}$

3. Quare

VI. 16 Eucl. 3. Quare si quatuor numeri sint proportionales: factus ab extremis æquatur facto à mediis. $7.9::7\times4.9\times4::28.36$. At $7\times9\times4=9\times7\times4$.

4. Hinc sequitur aurea (quæ dicitur) regula Proportionis. Si è tribus numeris datis, rectangulum sub secundo & tertio adplicetur ad primum: hoc est, si secundus multiplicet tertium, & primus dividat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. Tres numeri dati sunto 7, 9, 28: & pro quarto quæsito statuatur Q. Est igitur $7.9::28.Q$. Quare $7Q=9\times28$. Ideoque $\frac{9\times28}{7}=Q$. Item $5.12::8.\frac{8\times12}{5}$, hoc est $19\frac{1}{5}$.

5. E tribus numeris datis ad quartum Proportionalem inveniendum, duo primi innuunt rationem, & reliquus ingreditur quæstionem, estque in Proportione Directâ primus terminus (sive Divisor) homogeneus ei per quem fit quæstio: At in Proportione Reciprocâ primus terminus (sive Divisor) ipse est per quem fit quæstio.

6. Directa quidem Proportio est, quando terminus is per quem fit quæstio, quô major est, eô quartum majorem requirit: & quo minor eô minorem.

7. Reciproca Proportio est, quando terminus is per quem fit quæstio, quô major est, eô quartum minorem requirit: & quô minor, eô majorem.

8. Proportio continua $\because$ est, quando termini omnes medii inter primum & ultimum, rationum sunt tum consequentes, tum antecedentes. Ut 8, 12, 18, 27, sunt $\because$. Nam $8.12::12.18::18.27$.

Item

Item $\alpha, \beta, \frac{\beta q}{\alpha}, \frac{\beta c}{\alpha q}, \frac{\beta qq}{\alpha c}, \frac{\beta qc}{\alpha qq}$ &c. sunt $\div\!\!\div$

Quare si in hâc serie ultimus terminus sit ω, & summa omnium terminorum totius progressionis sit Z: erit $Z - \omega$ summa omnium antecedentium : & $Z - \alpha$ summa omnium consequentium.

9. Si quatuor magnitudines sint proportionales, $A.\alpha :: B.\beta$: etiam alternè, & inversè, & compositè & divisim, & conversè & mixtim proportionales erunt,

$$\left\{\begin{array}{rl}
\text{alternè,} & A . B :: \alpha . \beta. \\
\text{inversè,} & \alpha . A :: \beta . B. \\
\text{compositè,} & A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta. \\
\text{vel,} & A + B . B :: \alpha + \beta . \beta. \\
\text{divisim,} & A - \alpha . \alpha :: B - \beta . \beta. \\
\text{vel,} & A - B . B :: \alpha - \beta . \beta. \\
\text{conversè,} & A . A \pm \alpha :: B . B \pm \beta. \\
\text{vel,} & A . A \pm B :: \alpha . \alpha \pm \beta. \\
\text{mixtim,} & A + \alpha . A - \alpha :: B + \beta . B - \beta, \\
\text{vel,} & A + B . A - B :: \alpha + \beta . \alpha - \beta.
\end{array}\right.$$

10. Si quotlibet magnitudines sint proportionales, erit ut unus antecedens, ad suum consequentem; sic summa antecedentium, ad summam consequentium. Esto $A . \alpha :: B \beta :: C . \gamma :: D . \delta$: erit $A . \alpha :: A + B + C + D . \alpha + \beta + \gamma + \delta$.

$$\text{Nam} \left\{\begin{array}{l}
A . \alpha :: B . \beta . \text{ \& compositè} \\
A + B . \alpha + \beta :: (B . \beta)\ C . \gamma . \text{ \&} \\
A + B + C . \alpha + \beta + \gamma :: (C . \gamma)\ D . \delta . \text{ \&c.}
\end{array}\right.$$

Item in $\div\!\!\div$, $\alpha . \beta :: Z - \omega . Z - \alpha$. Quare $\alpha Z - \alpha q = \beta Z - \beta \omega$. vel $\beta Z - \alpha Z = \beta \omega - \alpha q$. Hinc obitèr liquet in-

ventio ſummæ omnium terminorum $\div\!\!:\,$, ſive Progreſſionis Geometricæ : per hanc Regulam $\left\{\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}\right. = Z.$

11. Si plurium proportionum antecedentes ſint æquales; erit ut unus antecedens, ad ſummam ſuorum conſequentium : Sic alter antecedens ad ſummam ſuorum. Eſto $A . B :: \alpha . \beta$: & $A . C :: \alpha . \gamma$: & $A . D :: \alpha . \delta$: erit $A . B + C + D :: \alpha . \beta + \gamma + \delta$. Liquet ex priore demonſtratione, terminis alternè poſitis.

12. Si binarum rationum conſequentes ſint æquales, ſunt ut antecedentes. Si verò antecedentes ſint æquales, ſunt reciprocè ut conſequentes.

$$\tfrac{7}{1} . \tfrac{9}{1} :: 7 . 9. \quad \text{Et } \tfrac{1}{9} . \tfrac{1}{7} :: 7 . 9.$$

13. Si bis quatuor magnitudines ſint ſimiliter proportionales; ipſarum etiam tum ſummæ, tum differentiæ proportionales erunt.

14. Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur : etiam Factæ, vel Quotæ, proportionales erunt.

15. Ratio antecedentis ad conſequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium, & tertii ad conſequentem : vel ex ratione tertii ad conſequentem & antecedentis ad tertium. Ut

$$7 . 9 :: \times \left\{\begin{matrix} 7 . A. \\ A . 9. \end{matrix}\right. \quad \text{Item } 7 . 9 :: \times \left\{\begin{matrix} A . 9. \\ 7 . A. \end{matrix}\right.$$

16. Inventio quarti proportionalis in computationibus Aſtronomicis.

Si

Si 100000 sit primus terminus, invenitur quartus per 5, Cap:4. Caſ.3. Ut 100000. 80902 :: 39875. 32260.

Si 100000 sit ſecundus terminus, invenitur quartus per 8, Cap:5. Ut 137658. 100000 :: 126225. 91706.

17. Inventio partis proportionalis ex datâ differentiâ duorum numerorum in Canone Proſthaphæreſe*ws*.

In tabulis Prutenicis, Ad epicycli primi Lunæ Anomaliam Gr:62, Proſtph: ablativa eſt Gr: 4,1786: & Differentia ibidem Gr: 0,0433: Quanta ejus pars debetur Anamaliæ Gr: 62,5667. Dic 1. 0,0433 :: 0,5667. 0,0245: per cap.4. ſect.5. Caſ. II. Tum 4,1786 + 0,0245 = 4,2031: quæ eſt Proſthaph: correcta.

Et contrà ſi quæratur Anomalia primi Epicycli Lunæ, congruens Proſthaphæreſi Gr: 4,2031. Proximè minor in Canone eſt Gr: 4,1786, reſpondens Anomaliæ Gr: 62: Eſtque Differentia ibidem Gr: 0,0433. Eſt autem 4,2031 - 4,1786 = 0,0245. Dic igitur 0,0433. 0,0245 :: 1. 0,566 +, partes adjungendæ Gr: 62. Eritque Anomalia quæſita Gr: 62,566 +.

18. Converſio partium Sexageſimarum in Decimales & contra Decimalium in Sexageſimales.

Partes Sexageſimæ, puta 45, convertuntur in Decimales, dividendo per 60. Et contra partes Decima-

 les,

les, puta 0,75, convertuntur in Sexagesimas, mul
plicando per 60.

Ut 6|0 . 4|5 : : 1 . 0,75. }
& 1 . 0,75 : : 60 . 45. } Nam

Divisio per 60 removet lineam separatricem uno lo
versus sinistram : Et Multiplicatio per 60 promov
lineam separatricem uno loco versus dextram. Q
regula notatu digna est.

Si verò plures sint species Sexagesimales anne
Integris, puta 127° 32′ 00″ 09‴ 45ⁱᵛ : hoc ute
compendio. Sub Integris 127 statue species Se
gesimales descensu obliquo : Tum facto initio ad i
fimam, singulas divide continuè per 6 : Et quot
suprascriptos ordini proximo superiori adjunges, d
nec ad Integros perveneris.

127,5333784722
′32,002708333
″00,1625
6) ‴09,75 ∗6
ⁱᵛ45

Et contra, si partes Decimales dentur, pu
127,533378472 9 : multiplicabis ipsas continuè p
6; & factos subtus scribes, amputato in singulis ord
nibus uno loco versus dextram; ut descensus obl
quus compleatur. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimal
bus, puta Grad: 236,4276, convertuntur in pa
tes Decimales diei; dividendo per 360, hoc est 6 ∗ 6

Et contra, partes, Decimales Diei puta 0,6567433: convertuntur in Gradus, multiplicando per 360. hoc est 60×6. intuere diligenter exemplum.

6)	236,4276
60)	39,4046×6
	0,6567433:×60

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus puta Grad: 236,4276 convertuntur in Horas dividendo per 15, hoc est, 3×5.

3)	236,4276
5)	78,8092×3
	15,76184×5

Et contra, Horæ cum partibus Decimalibus, puta 15,76184 convertuntur in Gradus, multiplicando per 15, hoc est, 5×3.

Horæ cum partibus decimalibus, puta Ho: 15,76184 convertuntur in partes Decimales Diei, dividendo per 24, hoc est, 4×6.

4)	15,76184
6)	3,94046×4
	0,656433:×6

Et contrà partes Decimales Diei, puta 0,6567433+, convertuntur in Horas, multiplicando per 24, hoc est, 6×4.

Summa collecta, puta 191374, convertitur in expansam, dividendo continuè per 60, & contrà summa eadem expansa, 53 09 34, convertitur in collectam multiplicando continuè per 60.

Notandum autem hic eſt, quod ſi ſumma collecta ſit unitatum, ſcil: 191374°; expanſa erit 53'' 09' 34°, hoc eſt 53 Sexagenæ ſecundæ, 9 Sexag: 1ᵃ, & 34 unitates. Si verò ſumma collecta ſit ſexageſimarum ſecundarum, ſcil: 191374''; expanſa erit 53° 09' 34''.

	19137̣4
60)	318|9|3·60
	53|0

19. Illa quidem proportio rationum fuit æqualitas & dicitur Geometrica; eſt autem alia proportio Arithmetica, quæ eſt æqualitas differentiarum: nempe quando in quatuor terminis, eadem eſt differentia tertii & quarti, quæ eſt primi & ſecundi. Ut 7.4:12.9. vel 7.7−3 : 12.12−3. Arithmeticè proportionales ſunt.

20. Quare è quatuor numeris Arithmeticè proportionalibus, ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum $7+12-3=7-3+12$.

21. Et ſi è tribus numeris datis ſecundus addatur tertio, & primus tollatur è ſumma: reliquus erit quartus Arithmeticè proportionalis. Ut ſi dentur 7, 4, & 12: erit $12+4-7=9$, qui quartus eſt quæſitus.

22. Eſt etiam proportio Arithmetica continua ſive Progreſſio, quando omnes termini à primo eâdem continuò exurgunt differentia: Ut 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c. Differentia communis omnium eſt 3. Nam in hâc ſerie, primus (& quaſi radix) eſt 4: ſecundus conſtat ex primo & differentiâ unâ: Tertius conſtat

ex primo & differentiis duabus : Et generaliter quilibet terminus constat ex primo & ex summâ differentiarum, quarum numerus uno minor est quam numerus terminorum : Exempli gratia, terminus decimus tertius conflabitur ex primo & differentiis duodecim, quarum summa est 36. Est igitur 4+36, hoc est 40, terminus decimus tertius.

23. Si in Progressione Arithmetica, primus terminus addatur ultimo, & summa ducatur in numerum terminorum : factus erit duplicata summa totius Progressionis : Nempe 40 + 4 in 13 = 572, quæ summæ est terminorum duplicata.

24. Si supra seriem terminorum in Progressione Geometrica, statuatur pro Indicibus, series terminorum qualiumcunque Progressionis Arithmeticæ : quibuslibet quatuor numeris in Arithmetica proportione respondebunt quatuor numeri Geometricè proportionales.

Indices,	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Termini,	5.	15.	45.	135.	405.	1215.	3645.	10935

Quia $10 + 16 - 6 = 20$; Erit $\frac{45 \times 1215}{5} = 10935$.

Atque hinc patet inventio termini cujusvis in Progressione Geometrica.

25. Est etiam tertia Proportio, Musica dicta, Quando in quatuor numeris, est ut Primus ad Quartum: sic differentia primi & secundi, ad differentiam Tertii & Quarti. Ut 5,8,12,30, sunt musicè proportionales : quia 5. 30 : : 8-5. 30-12 : : 3. 18. Item in specie-

 bus

bus A, M, N, E; Esto A. E :: M — A. E — N
Quare AE — AN = ME − AE. Terminis hisce ritè or-dinatis Regula erit, $\frac{AN}{2A-M} = E.$ & $\frac{EM}{2E-N} = A.$

In verbis sic, si rectangulum sub primo & terti[o] dividatur per excessum primi duplicati supra secun-dum: quotus erit quartus in Musica proportion[e]. Quare oportet terminos sic dari, ut primus duplicat[us] excedat secundum.

CAP. VII.

DE MAXIMA COMMUNI MEN-SURA: quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos ejusdem rationis.

1 MAxima duorum numerorum communi[s] mensura invenitur perpetua divisione ma-joris per minorem, & divisoris per reliquum. Nam divisor ille qui primus dividuum suum metitur, absque ullo reliquo, maxima erit utriusque numeri dati com-munis mensura. Ut numerorum 899 & 744 maxim[a] mensura invenietur 31.

31 124 155
31) ~~124~~)~~155~~)~~744~~)~~899~~(1,4,1
~~124~~ ~~124~~ ~~620~~ ~~744~~

2 Nu-

2 Numerorum reductio ad minimos terminos ejuſdem rationis fit dividendo utrumque per maximam ipſorum communem menſuram, ut 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi ſunt termini in eadem ratione, diviſo utroque per 31 maximam utriuſque menſuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ dividendo utrumque terminum per 3A. Et $\frac{4Acc}{6Aqq}$ reducitur ad $\frac{2Aq}{3}$ dividendo per 2Aqq. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, dividendo utrumque per B. Nam quod multiplicatio conficit, diviſio diſſolvit.

3 Quare ſi maxima duorum numerorum communis menſura ſit 1: dicuntur duo illi numeri primi inter ſe. Suntque minimi in eadem ratione, ut 29 & 24.

Si numerus primus ſit ad utrumque factorem, primus erit ad factum. Hinc proportionis operatio fieri ſæpenumero poteſt facilior, ut in exemplo.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \cancel{3} & 2 & & 5 \\ \cancel{12}.\cancel{8} & :: & \cancel{15}. & 10. \end{array}$$

5 Memento autem diligenter, *Quotieſcunque fractio aliqua, ſive ratio, proponitur, ut ipſam primò ad minimos terminos reducas*, ut $\frac{744}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$.

CAP.

CAP. VIII.

DE PARTIBUS: quæ etiam fractiones, sive numeri fracti, dicuntur.

1 VNitas (sive integrum unum quodque) concipi mente potest in quotcunque æquales partes divisibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero suo, quem unitas continet, sortiuntur: ut si unitas intelligatur dividi in binas æquales partes, dicuntur secundæ; si in tres, tertiæ: & sic de reliquis.

2. Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interjecta: quorum inferior denotat unitatem divisam in totidem æquales partes; & dicitur denominator. Superior verò ostendit quot ex partibus illis significantur; atque ideò dicitur numerator.

Ut $\frac{4}{5}$ 4 numerator, 5 denominator } & significant quatuor quintas partes, sive quatuor partes unius integri divisi quinquifariam.

3 *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas significata ad unitatem.* $4.5 :: \frac{4}{5}.1.$ $R.S :: \frac{R}{S}.1$

4. Et quia ratio quævis terminis innumeris similiter sese adinvicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: sequitur partes etiam easdem, non iisdem solummodò numeris, sed aliis infinitis, posse designari. Ut quincuncem signifi-

cant

cant non modo $\frac{5}{12}$, qui minimi ſunt termini in eadem ratione, ſed etiam $\frac{10}{24}$, $\frac{20}{48}$, $\frac{25}{60}$, $\frac{45}{108}$: & quotcunque alii numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemvis numerum, per 2 cap. 6.

5 Quare æqualium partium, ſive fractionum, termini ſunt proportionales, & contra.

6 Item, ſi partium numerator minor ſit denominatore, partes ſunt unitate minores : ſi æqualis, ſignificant unitatem. Et ſi major, partes unitatem excedunt, eâdem ratione, quâ denominator à numeratore ſuperatur. Reducuntur autem ad unitates dividendo numeratorem per denominatorem : ut $\frac{31}{7}$ ſunt $4\frac{3}{7}$ item $\frac{CR+SA}{R}$ eſt $C+\frac{SA}{R}$ Et contra integri, ſive unitates reſolvuntur in partes cujuſque generis multiplicando unitates per denominatorem earundem partium, ut 1 fiet $\frac{2}{2}$, vel $\frac{3}{3}$, &c. & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{28+3}{7}$, hoc eſt $\frac{31}{7}$. item $C+\frac{SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$

Cap. IX.

DE ADDITIONE ET SUBDUCTIONE PARTIUM.

1 SI partes propoſitæ diverſarum ſint ſpecierum : Primò reducendæ ſunt ad eandem denominationem

tionem, dividendo denominatores per maximam ipſorum communem menſuram; & multiplicando terminos per alternos quotos. Deinde in numeratoribus partium inventarum ejuſdem denominationis additio vel ſubductio inſtituenda eſt. Et ſummæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator ſubſcribendus.

2 Et ſi integri partibus ſint immixti, ſeorſum tamen ſunt numerandi. Exempli gratia:
Ex $6\frac{1}{18}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ ſunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque 2 & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus demptis è $6\frac{1}{18}$ reſtabunt $2\frac{95}{144}$ ut in exemplo

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} 67 \\ 39+28 \\ \frac{\cancel{13}}{4)\,\cancel{16}}\;2\;\frac{\cancel{7}}{\cancel{12}} \text{ eſt } \\ \underbrace{4 \quad 3}_{48} \end{array}
&
\begin{array}{c} 57 \quad 8 \\ \frac{\cancel{19}}{\cancel{48}}\;3 \text{ è } 6\;\frac{1}{\cancel{18}} \\ 6)\;\underbrace{8 \quad 3}_{144} \end{array}
&
\begin{array}{c} 152 \\ 5\frac{}{144} \\ 57 \\ 3\frac{}{144} \\ \hline 2\frac{95}{144}\;℞ \end{array}
\end{array}$$

Adde $\frac{A}{B}$ & $\frac{Z}{B}$, ſumma $\frac{A+Z}{B}$ $\qquad \frac{BE+DA}{\frac{B}{CA} + \frac{D}{CE}}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$, reſtat $\frac{CA-Bq}{BC}$ $\qquad C)\;\begin{array}{cc} CA & CE \\ A & E \end{array}$ $\underbrace{\qquad}_{CAE}$

Cap. X.

DE MULTIPLICATIONE ET DIVISIONE PARTIUM.

1 Multiplicatio comparat heterologos terminos (hoc est reducit ad minimos) & multiplicat homologos.

2 Divisio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3 Et si integri partibus sint immixti, resolvendi sunt integri in partes.

Exempla Multiplicationis.

$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$ in $\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}}$ fit $\frac{5}{12}$ | $\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{9}$ in $\frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}}$ fit $\frac{20}{27}$ | $\frac{5}{1}$ in $3\frac{1}{4}$ fit $\frac{65}{4}$ ($16\frac{1}{4}$

$\frac{A}{B}$ in B fit A | $\frac{A}{B}$ in Z fit $\frac{ZA}{B}$ | $\frac{A}{B}$ in $\frac{ZA}{C}$ fit $\frac{ZAq}{BC}$

Exempla Divisionis.

$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$) $\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{28}}}$ ($\frac{20}{21}$ | $\frac{8}{\underset{3}{\cancel{15}}}$) $7\frac{\overset{37}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}$ ($\frac{111}{8}$ ($13\frac{7}{8}$ | $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}$) $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{1}$ ($\frac{12}{1}$

$\frac{D}{1}$) $\frac{Aq}{B}$ ($\frac{Aq}{DB}$ | $\frac{A}{D}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BCD}{A}$ | $\frac{A}{B}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BqC}{A}$

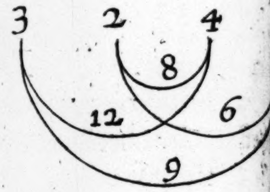
$\frac{B}{A}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{CA}{1}$ | $\frac{Ac}{C}$) $\frac{Bc}{D}$ ($\frac{BcC}{DAc}$.

4. Quis

4. Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21? Multiplica 21 per $\frac{2}{7}$
Nam 1. $\frac{2}{7}$ :: 21.6. vel 7.2 :: 21.6.

5. Cujus numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? Divide 6 per $\frac{2}{7}$
Nam $\frac{2}{7}$. 1 :: 6. 21. vel 2.7 :: 6.21.

6. Apud antiquos Musicæ Scriptores, termini multiplicandi in rationum sive continuatione, sive imminutione, connectuntur lineolis curvis, in hunc modum.



7. Rationum continuatio fit per Multiplicationem ipsarum, ac si essent fractiones. Continuentur rationes 3 ad 2, & 4 ad 3: idem est ac si dicatur, multiplicentur $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, fientque $\frac{12}{6}$, quæ dupla est ratio. Quare ratio sesquialtera continuata cum ratione sesquitertiâ facit duplum: vel ut loquuntur Musici, ex diapente & diatessaron fit diapason.

Rationum imminutio fit per Divisionem: ut è ratione 3 ad 2 detrahenda sit 4 ad 3: Idem est ac si jubeatur $\frac{3}{2}$ dividi per $\frac{4}{3}$ restabitque $\frac{9}{8}$: nam $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$, ratio sesquioctava: quæ mensura est Toni integri. Unde dicunt Musici quod differentia inter diapente & diatessaron est Tonus. Ut in hâc lineâ sive chordâ divisâ in duodecim partes.

CAP.

Cap. XI.

Exempla aliquot faciliſſima, quibus quæ hactenus tradita ſunt familiaria redduntur : Et via ad Æquationem Analyticam ſternitur.

1 SCiendum primò eſt, quod in ſequentibus, tum brevitatis, tum phantaſiæ juvandæ gratia paſſim fere his verborum ſymbolis utor. A & E ſignificant duos numeros, ſive magnitudines; quorum A pleruumque major eſt, E minor. Æ rectangulum ſub ipſis. Z eſt ſumma. X differentia. Zq. ſummæ quadratum. Xq differentiæ quadratorum, Z ſumma quadratorum. X differentia quadratorum Z ſumma cuborum. X differentia cuborum. A, M, E, ſunt tres continuè proportionales : A, M, N, E, quatuor. Q: C: QQ: QC: &c. præfixæ magnitudinibus inter duo utrinq; puncta incluſis, ſignificant illiuſmodi poteſtates. √ denotat radicem ſive latus poteſtatis ſimplicis, ſi non intercedant duo puncta : Si vero poteſtas duobus utrinque punctis includatur, ſignificat latus ipſius univerſale : quod etiam aliter per literam b vel r deſcribi ſolet, ut √b latus eſt Binomii, & √r latus Reſidui ſive Apotomes. == nota eſt æqualitatis.

2. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum major eſt A, minor E : quænam eſt ipſorum ſumma? quæ differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

quæ

quæ ſummæ & differentiæ ipſorum ſumma? quæ ſu
mæ & differentiæ ipſorum differentia? quod ſumm
differentiæ ipſorum rectangulum? quod ſummæ q
dratum? quod differentiæ quadratum? quæ q
dratorum ſummæ & differentiæ ſumma? quæ q
dratorum ſummæ & differentiæ differentia? qu
quadratum rectanguli?

Z eſt $A+E$. X eſt $A-E$. $Æ$ eſt AE.

$\mathcal{Z} = Aq+Eq$. $\mathcal{X} = Aq-Eq$.

$Z+X = 2A$. $Z-X = 2E$. $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}X = A$ &

$ZX = Aq-Eq = \mathcal{X}$. $(\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}X = E$

$Zq = Aq+2AE+Eq$. $Xq = Aq-2AE+Eq$.

$Zq+Xq = 2Aq+2Eq$. $Zq-Xq = 4AE$: &

$Æq = AqEq$. $(\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq = AE$.

3 Sunt duo numeri ſive magnitudines, quor
ſumma eſt Z, & major ex ipſis ponitur A: quiſna
eſt minor? quæ ipſorum differentia? quod ſu
ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? q
quadratorum differentia?

$E = Z-A$. $X = 2A-Z$. $Æ = ZA-Aq$.

$\mathcal{Z} = Zq-2ZA+2Aq$. $\mathcal{X} = 2ZA-Zq$.

Si vero minor ex ipſis ponatur E:

$A = Z-E$. $X = Z-2E$. $Æ = ZE-Eq$.

$\mathcal{Z} = Zq-2ZE+2Eq$. $\mathcal{X} = Zq-2ZE$.

4 Sunt duo numeri ſive magnitudines, quoru
differentia eſt X, & major ex ipſis ponitur A: qui
nam eſt minor? quæ ipſorum ſumma? quod ſub

ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$E = A - X.$ $Z = 2A - X.$ $\text{Æ} = Aq - XA.$
$Z = 2Aq - 2XA + Xq.$ $X = 2XA - Xq.$

Si vero minor ex ipsis ponatur, E:

$A = E + X.$ $Z = 2EE +.$ $\text{Æ} = Eq + XE.$
$Z = 2Eq + 2XE + Xq.$ $X = 2XE + Xq.$

5. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum major ad minorem, rationem habet R ad S; & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia.

$$E = \frac{SA}{R}. \quad Z = \frac{RA + SA}{R}. \quad X = \frac{RA - SA}{R}$$

$$\text{Æ} = \frac{SAq}{R}. \quad Z = \frac{RqAq + SqAq}{Rq}. \quad X = \frac{RqAq - SqAq}{Rq}$$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{RE}{S}. \quad Z = \frac{RE + SE}{S}. \quad X = \frac{RE - SE}{S}$$

$$\text{Æ} = \frac{REq}{S} \quad Z = \frac{RqEq + SqEq}{Sq} \quad X = \frac{RqEq - SqEq}{Sq}$$

D 6 Sunt

6. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum rectangulum est Æ; & major ex ipsis ponitur A quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{Æ}{A}. \quad Z = \frac{Aq + Æ}{A}. \quad X = \frac{Aq - Æ}{A}.$$

$$Z = \frac{Aqq + Æq}{Aq}. \quad X = \frac{Aqq - AqEq}{Aq}$$

Si verò minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{Æ}{E}. \quad Z = \frac{Æ + Eq}{E}. \quad X = \frac{Æ - Eq}{E}$$

$$Z = \frac{Æq + Eqq}{Eq}. \quad X = \frac{Æq - Eqq}{Eq}.$$

7. Atque ex his comparatis multæ æqualitates oriuntur. Exempla sumemus in summa & Differentia.

$$Z = A + E = 2A - X = 2E + X = \frac{Aq + Æ}{A} = \frac{Æ + Eq}{E} \ \&$$

$$X = A - E = 2A - Z = Z - 2E = \frac{Aq - Æ}{A} = \frac{Æ - Eq}{E} \ \&$$

Hoc modo etiam in reliquis comparationes poterunt institui, quibus eadem magnitudo multas admittet interpretationes atque diversitates.

CA

Cap. XII.

DE GENESI, ET ANALYSI POTESTATVM.

1 QUia omnia resolvuntur in easdem partes, ex quibus coagmentantur: primò scire oportet ex quibus partibus quælibet potestas constituitur. Potestates autem fiunt à radice aliquoties in se multiplicata. Nam latus in se ductum facit quadratum: Quadratum ductum in latus facit cubum. Cubus ductus in latus suum facit quadrato-quadratum, quæ potestas est quartana $\boxed{4}$: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, scilicet quintanam $\boxed{5}$: Et sic ulteriùs progrediendo fiunt potestates sextana $\boxed{6}$, septimana $\boxed{7}$, octavana $\boxed{8}$, nonana $\boxed{9}$, decumana $\boxed{10}$, & reliquæ, pro numero dimensionum suarum, ex quibus componuntur.

Quare potestatum à radice singulari, quæ unica figura, sive nota, constat, procreatio nihil habet difficultatis.

2 *TABELLA PRIOR POTESTATUM A RADICE SINGULARI.*

L N	2 q	3 c	4 qq	5 qc	6 cc	7 qqc	8 qcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	63536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16087	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6581	59049	531441	4782969	43046721

3 Quæ

3 Quæ verò à radice binarum notarum exurgunt, hunc habent ortus sui modum.

Genesis potestatum à radice binomia.

$$\begin{array}{l} \quad A + E \\ \quad A + E \\ \hline Aq + AE \\ \quad + AE + Eq \\ \hline Aq + 2AE + Eq. \quad \text{Quadratum} \\ \quad A + E \\ \hline Ac + 2AqE + AEq \\ \quad + AqE + 2AEq + Ec \\ \hline Ac + 3AqE + 3AEq + Ec. \quad \text{Cubus} \\ \quad A + E \\ \hline Aqq + 3AcE + 3AqEq + AEc \\ \quad + AcE + 3AqEq + 3AEc + Eqq \\ \hline Aqq + 4AcE + 6AqEq + 4AEc + Eqq. \quad \text{Quadrato-quadr:} \\ \quad A + E \quad \&c \end{array}$$

4 Atque hoc artificio conficietur tabula potestatum adscendentium in scala à radice binomia: quæ *POSTERIOR* vocetur.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc	Accc	Aqqcc
	2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	7AccE	8AqqcE	9AqccE	10AcccE
E	Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	21AqcEq	28AccEq	36AqqcEq	45AqccEq
		Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	35AqqEc	56AqcEc	84AccEc	120AqqcEc
			Eqq	5AEqq	15AqEqq	35AcEqq	70AqqEqq	126AqcEqq	210AccEqq
				Eqc	6AEqc	21AqEqc	56AcEqc	126AqqEqc	252AqcEqc
					Ecc	7AEcc	28AqEcc	84AcEcc	210AqqEcc
						Eqqc	8AEqqc	36AqEqqc	120AcEqqc
							Eqcc	9AEqcc	45AqEqcc
								Eccc	10AEccc
									Eqqcc

5 Quælibet ſpecies intermedia cujuſque ordinis componitur ex duabus ſpeciebus ordinis præcedentis utrinque proximis: nempe A poteſtate ſuperioris ſpeciei, & E poteſtate inferioris. Numerus etiam adfigendus ex utroque numero iiſdem adfixo aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula ulterius pro libitu.

6 In hâc tabulâ duæ extremæ poteſtates ſingulorum generum ſunt diagonales; & ſpecies intermediæ ſunt complementa: quibus adfixæ ſunt unciæ, oſtendentes numerum complementorum in conſtitutione cujuſque poteſtatis ſumendorum. Complementa autem omnia, cum E poteſtate, Gnomon non ineptè dici poterit.

7 Ex hâc tabulâ etiam liquet, quod quadratum à radice binarum notarum conſtat ex diagonalibus quadratis utriuſque notæ, & duplice rectangulo ſub ipſis notis. Cubus autem conſtat ex cubis diagonalibus, & triplice ſolido ſub quadrato majoris notæ & notâ minore, & triplice item ſolido ſub majore notâ & quadrato minoris. Quod ſimili[illegible] de reliquis quoque poteſtatibus eſt efferendum.

8 Oſtendit inſuper plena hæc myſt[illegible]lis pulcherrimis tabella, in numeroſa poteſtate, ſedes tum poteſtatum ſingularium ſive diagonalium, tum cujuſque ſpeciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata unica eſt ſpecies, quadratorum ſedes unicum interponent pro complementis locum. Et cùm inter binos cubos duæ ſunt complementorum ſpecies,

cuborum ſedes binos interponent locos complem-
tis ſuis ordine diſtribuendos.

Cap. XIII.

His itaque præmiſſis ad GENESIN poteſtatum accedamus.

1 PRoponatur Geneſis quadrati à latere major igitur nota A eſt 5, minor E eſt Scribantur 5 & 7 intermiſſo unius gradus ſpacio: linea ſub ipſis ducatur. Sub 5 ſtatuatur quadra ſuum 25: & ſub 7 ſuum 49. tum duplicetur 5, multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendum loco intermedio. addantur omnia ſuis quæque locis: ſumma erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæſito.

5	7		
25		Aq	
7	0	2AE	gnom
	49	Eq	
32	49		

2 Proponatur iterum Geneſis cubi à latere 57 bantur 5 & 7 intermiſſo duorum graduum ſpa & linea ſub ipſis ducatur. ſub 5 ſtatuatur cubus ſuus 125: & ſub 7 ſuus 343. tum quadratum à 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque tri ſolidum majus 525, ponendum loco priore. inte

5	7		
125	Ac		
52	5	3AqE	
7	35	3AEq	gnomon.
	343	Ec	
185	193		

dio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum à 7, fietque triplum ſolidum minus 735, ponendum loco intermedio ſecundo. addantur omnia ſuis quæque locis: ſumma erit 185193 pro cubo lateris 57 quæſito.

3 Si latus propoſitum conſtet pluribus figuris, ut 57209: Primò poteſtas duarum primarum figurarum 57 quærenda eſt. Deinde ſumptis 57 pro A, & figura 2 ſequente pro E: quæratur poteſtas ipſius eodem, qui ante oſtenſus eſt tabellæ ordine. Quod etiam in reliquis figuris ſingulatim eſt faciendum.

5	7	2	0	9		Radix.
25			Aq			
7	0		2 AE			gno-mon.
	49		Eq			
32	49			Aq		
	22	8		2 AE		gnomon.
		4		Eq		
32	71	84	00		Aq	
	1	02	96	0	2AE	gnomon.
				81	Eq	
32	72	86	96	81		Quadratum.

5	7	2	0	9	Radix.	
125		Ac				
52	5				3AqE	
7	35				3AEq	gnomon
	343				Ec	
185	193			Ac		
1	949	4			3AqE	
	6	84			3AEq	gnomon
		8			Ec	
187	149	248	000		Ac	
	88	339	680	0	3AqE	
		13	899	60	3AEq	gnomon.
				729	Ec	
187	237	601	580	329	Cubus.	

4 Ex his, quæ jam declarata ſunt, non difficile erit reliquas etiam omnes ſuperiorum generum poteſtates progignere: modò in ipſarum geniturâ, inferiorum omnium ad ipſis adſcendentium poteſtatum geneſis inſtituatur: ſicut in cubi geneſi jam factum vides.

Cap.

Cap. XIV.

Sequitur ANALYSIS: quæ est eductio radicis ex numerosa potestate data.

1 ANalysis, postquam sedes potestatum, pro suo quasque juxta tabulam genere, punctis, posito primo puncto sub loco unitatum, distinxerit: primò ex figuris primi à sinistra puncti potestatem diagonalem comprehensam tollit: latusque ipsius, quod A vocetur in margine scribit. tum numero reliquo, ad proximum usque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per divisorem ex latere A inventio legitimè conflatum, diviso, secundum latus E quærit & in margine scribit: per quod demùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo subtrahit. Et sic integra duorum primorum singularium laterum, in duobus primis punctis contenta, potestate dempta, restabit ad tertium usque punctum gnomon pro tertio latere similiter eruendo.

Analysis quadratica.

1			
723	02		
3272	8696	81	(57209
· ·	·	·	punctatio
25	Aq		
10	2A	divisor	
70	2AE }		
49	Eq }		
		gnomon	
749			
11	4 2A	divisor	
22	8	2AE }	
	4	Eq }	
22	84	gnomon	
		2A divisor	
1	144		
	1 1 4 4	0 2A divisor	
1	0 2 9 6	0 2AE }	
		81 Eq }	
1	0296	81	Gnomon.

```
     2|088
    62|044353
   187|237601|580|329   (57209
   125|   Ac
     7|5      3Aq
      |15     3A
     7|65     divisor
   525|5      3AqE
     7|35     3AEq
      |343    Ec
    60|193    gno- mon
      |9747   3Aq
      |   171 3A
      |97641  divi- sor
     1|9494   3AqE
      |   684 3AEq
      |     8 Ec
  1956|248    gno- mon
      |98|1552       3Aq
      |   1716       3A
      |98 17236      divisor
       98 155200 0       3Aq
           17160         3A
       9|8 156 9 1 60    divisor
       883 3968 00 0     3AqE
            13899 60     3AEq
                  729    Ec
      883|353|3508|329   gnomon.
```

```
  5  | 7  | 2  | 0
 25
     70
     49
 32  49
     22  8
          4
 32  71  84  00
```

2 Si numerus propoſitus non ſit verus ſui generis figuratus, ſed peracta Analyſi aliquid reſtet: punctationes circulorum pro ſuo genere, quot opus erit ſtatuendæ ſunt: & continuanda Analyſis poſt lineam ſeparatricem.

3 Ex his etiam quæ declarata ſunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex ſuperioribus poteſtatibus omnibus educere.

Cap. XV.

De lateribus ſurdis.

1 SI quotlibet numeri ſint continuè proportionales. Erit ut primus ad ultimum, ſic poteſtas primi æquimultiplicati numero terminorum minus uno, ad poteſtatem ſimilem ſecundi, ſunto quatuor

$$\div A,M,N,E \text{ Quia } \left\{\begin{array}{l} A.\ M::A.M \\ M.N::A.M \\ N.\ E::A.M \end{array}\right\} \text{Erit per Multiplicationē } A.E::Ac.Mc.$$

2 Numeri plani vel ſolidi ſimiles ſunt, quorum latera homologa ſunt proportionalia.

3 Numeri plani ſimiles ſunt in duplicatâ ratione (hoc eſt, ut quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani ſimiles, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Item numeri ſolidi ſimiles ſunt in triplicatâ ratione (hoc eſt, ut Cubi) homologorum

logorum laterum. Sunt igitur numeri ſolidi ſimiles, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum.

4 Et generaliter omnes figurati ſimiles plurium dimenſionum, ſunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicatâ numero dimenſionum, ex quibus componuntur. Dimenſiones ſunto quatuor, nempe ABCD unius, & EFGH alterius, in ratione R ad S.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l} A.\,E :: R.S \\ B.\,F :: R.S \\ C.\,G :: R.S \\ D.\,H :: R.S \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Erit per multiplicationem} \\ ABCD.EFGH :: Rqq.Sqq.\end{array}$$

5. Si numerus non ſit verus ſui generis figuratus, latus ejus dicitur ſurdum. & ſic notatur, $\sqrt{}$q6, $\sqrt{}$c4, $\sqrt{}$qq20, $\sqrt{}$qc13 : hoc eſt latus quadrati *6*, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13.&c.

6 Latera ſurda commenſurabilia ſunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti fiunt veri ſui generis figurati : ſuntque idcirco ut numerus ad numerum, ut $\sqrt{}$q12 & $\sqrt{}$q147 reducta ad minimos terminos per $\sqrt{}$q3 maximam utriuſque communem menſuram, fiunt $\sqrt{}$q4 & $\sqrt{}$q49, hoc eſt 2 & 7: quare cum $\sqrt{}$q12 & $\sqrt{}$q147 ſint ut 2 ad 7, erunt commenſurabilia. Sic $\sqrt{}$c40 & $\sqrt{}$c1715 ſunt ut 2 ad 7, quoniam diviſa per maximam ſuam communem menſuram $\sqrt{}$c5, fiunt $\sqrt{}$c8 & $\sqrt{}$c343; ideoque commenſurabilia.

7 Addun-

7 Adduntur autem, atque ſubtrahuntur, laten[a] ſurda commenſurabilia, ſi ſummæ, vel differenti[æ] numerorum ipſis ſimilium inventorum homogen[ea] poteſtas ducatur in communem ipſorum menſuram. Ut $\surd q147 + \surd q12$ eſt $\surd q243$; hoc eſt latus quadrati à $7+2$ (nempe 81) ductum in $\surd q3$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd q147 - \surd q1[2]$ eſt $\surd q75$; hoc eſt latus quadrati à $7-2$ (nemp[e] 25) ductum etiam in $\surd q3$.

Item $\surd c1715 + \surd c40$ eſt $\surd c3645$, hoc eſt latu[s] cubi $7+2$ (nempe 729) ductum in $\surd c5$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd c1715 - \surd c4[0]$ eſt $\surd c625$, hoc eſt latus cubi à $7-2$ ductum etiam in $\surd c5$.

Additionis & ſubductionis operatio talis eſt.

$$\surd q3)\ \surd q147\ (\surd q49 \cdot 7 \qquad \surd c5)\ \surd c1715\ (\surd c343 \cdot$$
$$\surd q\ 12\ (q4 \cdot 2. \qquad \surd c\ 40\ (\surd c\ 8 \cdot$$

$$\surd q243\ \ \surd q81 \cdot 9\ \text{ſumma}\ \ \surd c3645\ \ \surd c729 \cdot$$
$$\surd q75\ \ \surd q25 \cdot 5\ \text{diffr.}\ \ \surd c625\ \ \surd c125 \cdot$$

$$\surd 12 + \surd\tfrac{27}{4}$$
vel
$$\surd\tfrac{48}{4} + \surd\tfrac{27}{4}$$
$$\surd 3)\ \surd 48\ (\surd 16 \cdot 4$$
$$\surd 27\ (\surd 9 : 3$$
$$\surd\tfrac{147}{4} : \surd 49 \cdot 7$$

$$\surd\tfrac{245}{12} + \surd\tfrac{5}{12}$$
$$\surd 5)\ \surd 245\ (\surd 49 \cdot 7$$
$$\surd 5\ (\surd 1 \cdot 1$$
$$\surd\tfrac{320}{12} : \surd 64 \cdot 8$$
$$\surd\tfrac{180}{12} : \surd 36 \cdot$$

8 Latera verò ſurda incommenſurabilia, atq[ue]
he

heterogenea, adduntur, vel subtrahuntur, signis + vel — ut $\sqrt{q7} + \sqrt{q4}$, & $\sqrt{c10} - \sqrt{c5}$.

9 Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit numerus ejusdem generis figuratus, cujus latus æquale est facto à lateribus numerorum multiplicatorum. Et si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum dividatur, quotus erit numerus ejusdem generis figuratus, cujus latus æquale est quoto lateris majoris divisi per latus minoris. Ut factus à numeris cubicis 343 & 27 est 9261, numerus etiam cubicus, cujus latus est 7×3. Item $\sqrt{q}\,\frac{AqEq}{Eq}$ est $\frac{AE}{B}$.

10 Quare laterum surdorum homogeneorum multiplicatio, & divisio, procreat latus etiam surdum homogeneum: ut $\sqrt{q7}$ in $\sqrt{q3}$ est $\sqrt{q21}$. Et $\sqrt{q7})\ \sqrt{q21}\ (\sqrt{q3}$: vel $\sqrt{q}\,\frac{21}{7}$ est $\sqrt{q3}$. Item $\sqrt{qA}$ in $\sqrt{qE}$ est $\sqrt{qAE}$. Et $\sqrt{qA})\ \sqrt{qAE}\ (\sqrt{qE}$: vel $\sqrt{q}\,\frac{AE}{A}$ est $\sqrt{qE}$.

11 Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel dividuntur, nisi prius ad idem genus reducantur, quod fit dividendo indices utriusque potestatis propositæ per maximam ipsorum communem mensuram: & multiplicando tum Indices per alternos quotos: tum ipsas potestates in species alternis quotis cognomines. Ut si ad multiplicandum vel dividendum, proponantur $\sqrt{qq10}$ & $\sqrt{cc7}$. Primò reducuntur ad $\sqrt{cccc1000}$, & $\sqrt{cccc49}$: cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel divisio

visio. Sic etiam $\sqrt{qqA}$, & $\sqrt{ccBq}$ reducuntur ad $\sqrt{ccccAc}$, & $\sqrt{ccccBqq}$: uti planiùs adparebit per praxim, quæ hic adponitur.

$$\sqrt{\boxed{12}}\,1000 \quad \sqrt{\boxed{12}}\,49 \qquad\qquad \sqrt{\boxed{12}}\,Ac \quad \sqrt{\boxed{12}}\,Bqq$$

$$\boxed{2})\ \sqrt{\boxed{4}}\,10 \quad \sqrt{\boxed{6}}\,7 \qquad\qquad \boxed{2})\ \sqrt{\boxed{4}}\,A \quad \sqrt{\boxed{6}}\,Bq$$

$$\boxed{2} \qquad \boxed{3} \qquad\qquad\qquad \boxed{2} \qquad \boxed{3}$$

Rursus si $\sqrt{c32}$ duplicandum sit, vel multiplicandum per 2: pro 2 sumatur $\sqrt{c8}$: & per ipsum multiplicetur $\sqrt{c32}$; fietque $\sqrt{c256}$, æquivalens bis $\sqrt{c32}$.

Item si dimidiandum sit $\sqrt{c32}$, vel dividendum per 2 : pro 2 sumatur $\sqrt{c8}$: & per ipsum dividatur $\sqrt{c32}$; orieturque $\sqrt{c\frac{32}{8}}$; hoc est $\sqrt{c4}$, æquivalens $\frac{1}{2}\sqrt{c32}$.

Sic etiam $\frac{22}{7}\sqrt{qAq}$, fiet $\sqrt{q\frac{484}{49}Aq}$, hoc est $\frac{22}{7}A$.

12 Si latus potestatis multiplicandum sit secundùm exigentiam suæ speciei : deleatur nota speciei lateralis. ut Q: $\sqrt{q64}$, vel C: $\sqrt{c64}$, est 64.

13. Et si latus potestatis, cujus index est numerus compositus, multiplicandum sit secundùm exigentiam alterutrius speciei componentis : latus alterius speciei numero speciali solùm præfigatur : ut Q: $\sqrt{cc64}$ est $\sqrt{c64}$ & C. $\sqrt{cc64}$ est $\sqrt{q64}$. Nam $\sqrt{cc}$ est $\sqrt{\boxed{2\times 3}}$

14 Si magnitudo plurium nominum, ducatur in seipsam

ſeipſam; cum uno ex ſuis ſignis mutato; expurgabitur unum nomen. Ut $3+\sqrt{5}+\sqrt{2}$ in $3+\sqrt{5}-\sqrt{2}$, fiet $12+\sqrt{180}$.

Cap. XVI.

DE ÆQUATIONE. & De quæſtionibus per Æquationem ſolvendis.

1 QUotieſcunque problema aliquod, ſive quæſtio, proponitur: Puta præſtitum eſſe quod poſtulatur: aptáque adhibita ratiocinatione, pro quæſita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis conſonantes; quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoſcantur.

2 Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæſitæ, ſecundum conditionem quæſtioni convenientem, efformentur atque comparentur, addendo, ſubtrahendo, multiplicando, & dividendo donec tandem aliquid inveniatur magnitudini, de qua quæritur, vel ſuæ, ad quam adſcendet, poteſtati æquale.

3 Et quia in omni ferè æquatione, ubi primò ex involucris quæſtionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipſius ita ſunt ordinandi, ut quæ in data habentur menſura, faciant unam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. Quod quo artificio fiat, regulæ quinque ſequentes commonſtrabunt.

4 Primò si magnitudo quæsita, vel aliquis ejus gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut omisso communi illo denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. Ut $A - C = \frac{Aq+Bq}{D} + B + C$: Erit $DA - DC = Aq+Bq+DB+DC$.

5 Secundò, si, quæ in data habentur mensura, immisceantur cum quæsitis: *fiat transpositio magnitudinum ex una parte in aliam sub contrario signo.* Ut $DA - DC = Aq+Bq+DB+DC$: Et transpositis DC & Aq, erit $DA - Aq = 2DC+DB+Bq$. Quæ etiam regula in omni transpositione servanda est.

6 Tertiò, si species altissima quæsitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam: fiat omnium magnitudinum æquationis ad illam communis adplicatio. Ut $BAq+BqA = Zc$: erit $Aq+BA = \frac{Zc}{B}$

7 Quartò, si contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ: fiat omnium, per adplicationem ad minimam speciem, secundum ordinem tabellæ communis depressio. Ut $Aqq+BAc = ZqAq$, erit $Aq+BA = Zq$, expuncto in singulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet proposita poterit deprimi, sive reduci ad minores species; Si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis adplicatio. Ut $Ac + XAq = Nc$, divisa per A, fiet $Aq+XA = \frac{Nc}{A}$: at divisa per Aq, fiet

A

$A+X=\frac{Nc}{Aq}$ Quæ quidem operatio in numerosa adfectarum æquationum resolutione usus erit non contemnendi: quia latus quæsitum faciliùs æstimatur in minoribus potestatibus, quam in majoribus.

8 Quintò, si magnitudo aliqua sit latus surdum: æquatio in ipsis potestatibus est instituenda. Ut $\sqrt{q}BA+B=C$: vel per transpositionem $\sqrt{q}BA=C-B$. Ideòque ipsorum quadrata, $BA=Cq-2CB+Bq$: vel $A=\frac{Cq-2CB+Bq.}{B}$

Item $\sqrt{u}: BA+CA:-D=B$. Vel $\sqrt{u}: BA+CA:=D+B$. Ideoque & ipsorum quadrata $BA+CA=Bq+2BD+Dq$: vel $A=\frac{Bq+2BD+Dq.}{B+C}$

Denique $\sqrt{q}\,\frac{A}{3}=\sqrt{c}2A$: vel per 11 c 15, $\sqrt{qc}\,\frac{Ac}{27}=\sqrt{qc}4Aq$. quare $Ac=108Aq$. Et $A=108$.

9 Æquationum, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ adscendentes, constitutio liquebit ex sect: 2, 3, 4, capitis 11: Nam quia

$Z-A=E$: ducatur utraque pars in A.
$Z-E=A$; ducatur utraque pars in E.
$A-X=E$: ducatur utraque pars in A.
$E+X=A$: ducatur utraque pars in E.

Atque hac multiplicatione hujusmodi orientur æquationes.

ZA - Aq = Æ	Aq - XA = Æ
ZAq - Aqq = Æq	Aqq - XAq = Æq
ZAc - Acc = Æc	Acc - XAc = Æc
&c	&c
ZE - Eq = Æ	Eq + XE = Æ
ZEq - Eqq = Æq	Eqq + XEq = Æq
ZEc - Ecc = Æc	Ecc + XEc = Æc
&c	&c

Quotiescunque igitur proponitur Æquatio constans ex tribus speciebus æqualiter in ordine scalæ adscendentibus: Cogitabis magnitudinem absolutam datam esse rectangulum sub duabus magnitudinibus quæsitis, sive latera sint, sive quadrata, sive Cubi &c: qualis scil: est potestas mediæ speciei. In media autem specie, si altissima species sit negata, coëfficientem esse summam magnitudinum quæsitarum; Et de utrâque exponi. At si altissima species sit adfirmata, coëfficientem esse magnitudinum quæsitarum differentiam; ipsam autem speciem exponi de majore, negatam; vel de minore, adfirmatam.

Tum datis binarum magnitudinum summa & rectangulo, datur earundem differentia: vel data differentia & rectangulo, datur summa. Nam per 2 Cap: XI.

$$\left.\begin{array}{l} Q:\tfrac{1}{2}Z:-Æ = Q:\tfrac{1}{2}X \\ Q:\tfrac{1}{2}X:+Æ = Q:\tfrac{1}{2}Z \end{array}\right\}\text{quare}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{u}:\tfrac{1}{4}Zq-Æ: = \tfrac{1}{2}X. \\ \sqrt{u}:\tfrac{1}{4}Xq+Æ: = \tfrac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Denique datis binarum magnitudinum $\tfrac{1}{2}Z$ & $\tfrac{1}{2}X$, dantur ipsæ magnitudines; hisce duabus Regulis.

$$\text{I Reg} - \tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{u}:\tfrac{1}{4}Zq - Æ:(\tfrac{1}{2}X) = \frac{A.}{E.}$$

$$\text{II Reg.} \sqrt{u}:\tfrac{1}{4}Xq + Æ:(\tfrac{1}{2}Z) \pm \tfrac{1}{2}X = \frac{A.}{E.}$$

10. ***GENESIS*** sex Binomiorum ex lateribus suis surdis. Regula est, $Z + 2\,Æ = Zq$.
In Apotomis vero, $Z - 2\,Æ = Xq$.

Exempl: I. Quadretur Binomium $4 + \sqrt{11}$. Hîc Z est $16 + 11$, hoc est 27. Et Æ est $\sqrt{16} \times \sqrt{11}$, hoc est $\sqrt{176}$: cujus duplum est $\sqrt{704}$. Quadratum igitur erit $27 + \sqrt{704}$. Quod dicitur Binomium I.

Exempl: II. Quadretur Bimediale prius, $\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\tfrac{27}{4}$. Hîc Z est $\sqrt{12} + \sqrt{\tfrac{27}{4}}$, vel $\sqrt{\tfrac{48}{4}} + \sqrt{\tfrac{27}{4}}$; hoc est $\sqrt{\tfrac{147}{4}}$, per 7, Cap: XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,12 \times \sqrt{qq}\,\tfrac{27}{4}$, vel $\sqrt{qq}\,3 \times \sqrt{qq}\,27$; hoc est, $\sqrt{qq}\,81$, scil: 3: cujus duplum est *6*. Quadratum igitur erit $\sqrt{\tfrac{147}{4}} + 6$: Quod dicitur Binomium II.

Exempl : III. Quadretur Bimediale posterius $\sqrt{qq}\,\tfrac{80}{3} + \sqrt{qq}\,15$. Hîc Z est $\sqrt{\tfrac{80}{3}} + \sqrt{15}$, vel $\sqrt{\tfrac{80}{3}} + \sqrt{\tfrac{45}{3}}$; hoc est $\sqrt{\tfrac{245}{3}}$, per 7, Cap. XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,\tfrac{80}{3} \times \sqrt{qq}\,15$, vel $\sqrt{qq}\,80 \times \sqrt{qq}\,5$; hoc est, $\sqrt{qq}\,400$, scil: $\sqrt{20}$: cujus duplum est $\sqrt{80}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{\tfrac{245}{3}} + \sqrt{80}$. Quod dicitur Binomium III.

In tribus reliquis, quæ constant ex radicibus Bino-

mii & Residui connexis, ut √b:A+E: pl √r:A-E: perspicuum est Z esse 2A: & Æ esse √: Aq-Eq. quare

Exempl: IV. Quadretur Major, √b: $\frac{7}{2}$+ √ $\frac{29}{4}$: pl √r: $\frac{7}{2}$- √ $\frac{29}{4}$. Hîc Z est $\frac{7}{2}$+$\frac{7}{2}$, hoc est, 7. & Æ est √u: $\frac{49}{4}$ - $\frac{29}{4}$: hoc est, √ $\frac{20}{4}$, scil: √5: cujus duplum est √20. Quadratum igitur erit 7+ √20. Quod dicitur Binomium IV.

Exempl: V. Quadretur Potens rationale cum mediali, √b: √5+1: pl √r: √5-1. Hîc Z est √5+ √5; hoc est, √20. Et Æ est √:5 1: hoc est, √4, scil: 2: cujus duplum est 4. Quadratum igitur erit √ 20+4. Quod dicitur Binomium V.

Exempl: VI. Quadretur Potens duo medialia, √b: √5+ √3: pl √r: √5- √3. Hîc Z est √5+ √5, hoc est, √20. Et Æ est √:5-3: hoc est, √2: cujus duplum est √8. Quadratum igitur erit √20+ √8. Quod dicitur Binomium VI.

11. Analysis. In Binomio igitur quadratico, majus nomen est Z: & minus nomen 2Æ. At in 2 Cap. XI ordinatum est, $\frac{1}{4}$ Zq-Æ = $\frac{1}{4}$Xq: scil: $\frac{1}{4}$Q: A+E: -Æ = $\frac{1}{4}$Q: A-E. Quare si pro A & E sumantur ipsarum quadrata Aq & Eq, erit $\frac{1}{4}$Q: Aq+Eq: -AqEq = $\frac{1}{4}$Q: Aq-Eq: hoc est, $\frac{1}{4}$Zq-Æq = $\frac{1}{4}$Xq, ex quo Theoremate pro Analysi *Binomii* deducitur hæc Regula.

$\frac{1}{2}$Z $\pm$ √q: $\frac{1}{4}$Zq-Æq: ($\frac{1}{2}$X) = Aq. / Eq.

Exempl: I. Quæratur latus Binomii I, 27 + √704 nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$ Z est $\frac{27}{2}$ & Æ est √ $\frac{704}{4}$: & Zq-Æq est $\frac{729}{4}$ - $\frac{704}{4}$; hoc est, $\frac{25}{4}$: cujus latus $\frac{5}{2}$ est $\frac{1}{2}$X. A

p

per Reg: $\frac{27}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{matrix} 16. & 4 \\ 11. & \sqrt{11} \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur quæsitum est $4 + \sqrt{11}$. Et dicitur Binomium.

Exempl. II. Quæratur latus Binomii II, $\sqrt{\frac{147}{4}} + 6$: nempe $Z + 2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{\frac{147}{16}}$: Et $Æ$ est 3. & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $\frac{147}{16}$-(9) $\frac{144}{16}$; hoc est $\frac{3}{16}$: cujus latus $\sqrt{\frac{3}{16}}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Reg: $\sqrt{\frac{147}{16}} \pm \sqrt{\frac{3}{16}} = \begin{matrix} \sqrt{12}. & \sqrt{qq}\,12. \\ \sqrt{\frac{27}{4}}. & \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}. \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Et dicitur Bimediale prius.

Exempl: III. Quæratur latus Binomii III, $\sqrt{\frac{245}{3}} + \sqrt{80}$: nempe $Z + 2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{\frac{245}{12}}$: & $Æ$ est $\sqrt{20}$. & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $\frac{245}{12}$-(20) $\frac{240}{12}$; hoc est $\frac{5}{12}$: cujus latus $\sqrt{\frac{5}{12}}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Regul: $\sqrt{\frac{245}{12}} \pm \sqrt{\frac{5}{12}} =$
$\begin{matrix} \sqrt{\frac{80}{3}}. & \sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \\ \sqrt{15}. & \sqrt{qq}\,15 \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} + \sqrt{qq}\,15$. Et dicitur Bimediale posterius.

Exempl: IV. Quæratur latus Binomii IV, $7 + \sqrt{20}$; nempe $Z + 2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\frac{7}{2}$: & $Æ$ est $\sqrt{5}$: & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $\frac{49}{4}$-(5) $\frac{20}{4}$; hoc est, $\frac{29}{4}$: cujus latus $\sqrt{\frac{29}{4}}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Reg: $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = \begin{matrix} \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}} & \sqrt{b}:\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}} \\ \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}} & \sqrt{r}:\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}} \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur quæsitū est $\sqrt{b}: \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}: \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$: & dicitur Major.

Exempl: V. Quæratur latus Binomii V, $\sqrt{20} + 4$; nempe $Z + 2Æ$. Quare $\frac{1}{2}\sqrt{}$ est $\sqrt{5}$: & $Æ$ est 2: & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $5 - 4$; hoc est 1, cujus latus 1 est $\frac{1}{2}X$. At per Reg. $\sqrt{5} \pm 1 = \begin{matrix} \sqrt{5} + 1. & \sqrt{b}:\sqrt{5} + 1 \\ \sqrt{5} - 1. & \sqrt{r}:\sqrt{5} - 1 \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur

tur quæsitum est $\sqrt{b}: \sqrt{5}+1$:pl $\sqrt{r}: \sqrt{5}-1$. Et dicitur Potens rationale cum mediali.

Exempl: VI. Quæratur latus Binomii VI, $\sqrt{20}+\sqrt{8}$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{5}$: & $Æ$ est $\sqrt{2}$: Et $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $5-2$; hoc est 3: cujus latus $\sqrt{3}$ est $\frac{1}{2}X$. At per

$$\text{Regul: } \sqrt{5}\pm\sqrt{3} = \left.\begin{array}{l} \sqrt{5}+\sqrt{3}.\sqrt{b}: \sqrt{5}+\sqrt{3}. \\ \sqrt{5}-\sqrt{3}.\sqrt{r}: \sqrt{5}-\sqrt{3}. \end{array}\right\} \text{Latus}$$

igitur quæsitum est $\sqrt{b}: \sqrt{5}+\sqrt{3}$:pl $\sqrt{r}: \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et dicitur Potens duo medialia.

12 Atque hîc obiter trianguli rectanguli plani Genesis se offert. Quia $Zq = Xq+4AE$. nempe $Hq = Bq+Cq$, per 47 è 1: Propositis binis quibuscunque lineis sive numeris, A & E, trianguli rectanguli latera erunt, $A+E$, $A-E$, $\sqrt{4AE}$: vel etiam (mutatis A & E in Aq & Eq) $Aq+Eq$. $Aq-Eq$, $2AE$. Ut si proponantur duo numeri 2 & 1: latera erunt $3, 1, \sqrt{8}$: nempe $2+1$, $2-1$, $\sqrt{4\times2\times1}$. vel etiam 5, 3, 4: nempe $4+1$, $4-1$, 2×1 bis.

13 Datis binis triangulis, rectangulis, H, B, C: & h, b, c: tertium ex ipsis fabricare: idque dupliciter.

$$1^{\circ}. \text{Quia } \left.\begin{array}{l} Bq = Hq - Cq \\ \text{Et } bq = hq - cq \end{array}\right\} \text{Multiplicentur invicem;}$$

Eritque $Bqbq = Hqhq + Cqcq$ mi $Hqcq + Cqhq$.
At $Hqhq + Cqcq + 2HChc = Q{:}\,Hh + Cc$:
Et $Hqcq + Cqhq + 2HChc = Q.\,Hc + Ch$:
Subducatur unum quadratum ex altero: & erit,
$Bqbq = Q{:}Hh + Cc$: mi $Q{:}Hc + Ch$:
Et sic inventum est ex his triangulum tertium,

Bb.

$Bb. Hh + Cc. Hc + Ch.$ Hæc Regula sit I.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi base, sumatur rectangulum sub basibus. Pro hypotenusa, rectangulum sub hypotenusis, auctum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub hypotenusa primi & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & hypotenusa secundi.

II° Quia $Hq = Bq + Cq$ } Multiplicentur invicem
Et $hq = bq + cq$ }

Eritque $Hqhq = Bqbq + Cqcq$ pl $Bqcq + Cqbq$.

At $Bqbq + Cqcq - 2BCBc = Q{:}Bb - Cc{:}$

Et $Bqcq + Cqbq + 2BCbc = Q{:}Bc + Cb{:}$

Addantur hæc duo quadrata: & erit

$Hqhq = Q{:}Bb - Cc{:}$pl $Q{:}Bc + Cb$.

Et sic inventum est ex his triangulum tertium,

$Hh. Bb - Cc. Bc + Cb.$ Hæc Regula sit II.

Enuntiatur autem verbis sic. Pro trianguli novi hypotenusa, sumatur rectangulum sub hypotenusis. Pro base, rectangulum sub basibus minutum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub base primi, & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & base secundi.

14. Si trianguli rectanguli latera continuè multiplicentur juxta binas regulas modò inventas: Prima multiplicatio angulum basi oppositum duplicabit: Secunda triplicabit: tertia quadruplicabit: & sic ulterius.

Exempl:

Exempl: Reg: Iª. Bb. Hh+Cc.Hc.+Ch.

B. H. C: anguli simpli.
B. H. C

Bq . Hq+Cq . 2HC . anguli dupli.
B . H . C

Bc . Hc+HCq . 2HqC
2HCq . HqC+Cc.

Bc . Hc+3HCq . 3HqC+Cc. tripli.
B . H . C

Bqq . Hqq+3HqCq . 3HcC+HCc
Cqq+3HqCq HcC+3HCc

Bqq . Hqq+6HqCq+Cqq . 4HcC+4HCc.
B . H . C quadrupli
&c

Exempl: Reg: IIª. Hh. Bb−Cc. Bc+Cb.

H . B . C : anguli simpli.
H B . C

Hq . Bq−Cq . 2BC : anguli dupli.
H . B . C

Hc . Bc−BCq . 2BqC
−2BCq BqC−Cc

Hc . Bc−3BCq . 3BqC−Cc : tripli.
H . B . C

Hqq . Bqq−3BqCq . 3BcC−BCc
Cqq−3BqCq BcC−3BCc

Hqq . Bqq−6BqCq+Cqq . 4BcC−4BCc.
H . B . C quadrupli
&c

CAP.

Cap. XVII.

Alia tabulæ posterioris in Cap: 12. inspectio, quoad Æquationes.

1 A Binomia radice A + E, potestatum species omnes sunt adfirmatæ. A Residuo verò potestatum species omnes sunt alternatim negatæ, ut Q: A − E : est Aq − 2AE + Eq. Et C: A − E : est Ac − 3AqE + 3AEq − Ec. Et QQ: A − E : est Aqq − 4AcE + 6AqEq − 4AEc + Eqq. &c Adeò ut si potestatis cujusvis species alternatim sumptæ, in duas summas aggregentur: harum summarum connexio cum signo radicis, erit radicis ipsius potestas. Atque hæc est Binomiorum, ac Residuorum, Quadraticorum, Cubicorum, aliorumque constitutio.

2. Quare nominum Binomii, vel Residui cujusque differentia, est homogenea potestas differentiæ nominum radicis. scil: Ac + 3AEq mi 3AqE + Ec, vel Ac + 3AEq − 3AqE − Ec, est C: A − E.

3. Et Quadratorum è nominibus Binomii vel Residui cujusque differentia, est homogenea potestas differentiæ quadratorum è nominibus radicis. scil: Q: Ac + 3AEq: mi Q: 3AqE + Ec: est C: Aq − Eq.

Nam per exempl: Reg: I, in 14, Cap: XVI, si cogitetur A hypotenusa trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq − Eq quadratum basis; hoc Theorema aliter symbolis explicabitur sic: Q: Hc + 3HCq: mi Q: 3HqC + Cc: = C: Bq: = Q: Bc: ergo

4 At

4 At si species in nominibus aggregatæ, ipsæ etiam alternatim adfirmentur, & negentur: Quadratorum è nominibus summa, est homogenea potestas summæ quadratorum è nominibus radicis. Scil: Q: Ac−3AEq: pl Q: 3AqE−Ec: est C: Aq+Eq.

Nam per exempl: Reg:II, in 14, Cap:XVI, si cogitetur A basis trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq+Eq quadratum hypotenusæ; hoc Theorema aliis symbolis explicabitur sic: Q: Bc−3BCq: pl Q: 3BqC−Cc: = C:Hq: = Q:Hc. Ergo

Pulcherrima sunt hæc circa angulares sectiones mysteria.

5 Omnes cujusque ordinis intermediæ species sunt etiam potestates mediorum inter A & E proportionalium. scil. inter Ac & Ec, sunt duæ mediæ proportionales, AqE & AEq: qui etiam cubi sunt ex M & N. Quare A, √cAqE, √cAEq, E, sunt continue proportionales: nempe A,M,N,E. Nam AqE = AMN = Mc: & AEq = MNE = Nc. Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E: ut si velis quinque medios proportionales, potestates erunt 6| sive cc, quarum Index unitate excedit numerum quæsitorum mediorum: Eruntque A, √cc AqcE, √ccAqq Eq, √cc Ac Ec, √cc Aq Eqq, √cc AEqc, E, ∴

6 Omnis media species in unoquoque genere, fit ex duabus nominum radicis potestatibus, quarum Indices simul, æquales sunt Indici ejusdem generis: me-

diæ autem ipsius speciei ab extremis suis distantiæ, æquales erunt Indicibus alternarum facientium: & facientibus suis in communi angulo respondent. Scil: AqEc generis quadrato-cubici, fit ex Aq in Ec, quibus in communi angulo respondent. Estque ab Aqc tertia: & ab Eqc secunda.

Consect. Atque hinc facile erit radicis Binomiæ datæ potestatem quamlibet (inventis omnibus mediis inter potestates nominum extremas) construere. Ut in exemplo, si radicis Binomiæ A + √Æ quæratur Quadrato-Cubus : erit Aqc + 10 ÆAc + 5 ÆqA plus 5 √ÆAqcc + 10√Æc Aqq + √Æqc: Quod Binomium est Quadrato-Cubic.

				Aqc
	Aq	Ac	Aqq	5√ÆAqcc
A				10 ÆAc
√Æ	Æ			10√Æ Aqq
		√Æc	Æq	5ÆqA
				√Æqc

7. Si species aliqua multiplicetur in Æ, producta magnitudo erit media species collateralis, in ordine alternè sequente, atque eadem numero à suis extremis. Ut Ac × Æ, est AqqE, quæ prima est ab Aqc, & quarta ab Eqc. Sic AcE × Æ, est Aqq Eq, quæ ab Acc secunda est, & ab Ecc quarta. Et similiter de reliquis.

8 Si species aliqua multiplicetur per A — E vel X, producta magnitudo erit differentia inter duas species ordinis sequentis utrinque proximas. Ut AcX = Aqq — AcE. AqEX = AcE — AqEq. AEqX = AqEq — AEc. EcX = AEc — Eqq. Quare

Si

Si omnes cujusvis ordinis species multiplicentur per X, producetur differentia duarum potestatum extremarum ordinis proximi superioris. Ut ex Ac AqE+AEq+Ec, ductis in X, fiet Aqq-Eqq.

9 In ordinibus Indicum imparium (l, c, qc, &c) summa duarum extremarum potestatum; at in ordinibus Indicum parium (q, qq, cc, &c) differentia earundem; fit ex A+E ducta in singulas species ordinis minoris praecedentis, alternatim adfirmatas & negatas. Ut Ac+Ec, fit ex Aq—AE+Eq, ductis in A+E. Item Aqq-Eqq, fit ex Ac-AqE+AEq-Ec ductis in A+E.

10 Si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipsis factae erunt etiam contrariae. Ut Aq-2AE+Eq ductae in A-E, fient Ac--3AqE+3AEq--Ec. At verò eadem ductae in --A+E, fient--Ac+3AqE--3AEq+Ec.

11 Unciae sive numeri speciebus praefixi, sunt figurae numerariae. Nam omnes sub A & E, sunt radices. Omnes sub Aq & Eq, sunt triangulares. Omnes sub Ac & Ec, sunt pyramidales. Omnes sub Aqq & Eqq, sunt triangulo-triangulares. Omnes sub Aqc & Eqc, sunt triangulo-pyramidales. Omnes sub Acc & Ecc, sunt pyramidi-pyramidales &c.

12. Si radix tribus constet nominibus, A, E, I,

$$\text{Quadratum}\left\{\begin{matrix} Aq, & 2AE, \\ Eq, & 2EI, \\ Iq, & 2AI, \end{matrix}\right\} \quad \text{Cubus}\left\{\begin{matrix} Ac, & Ec, \quad Ic, \\ 3AqE, & 3AEq, \\ 3AqI, & 3AIq, \\ 3EqI, & 3EIq, \\ & 6AEI. \end{matrix}\right.$$

Et nota quòd si in aliqua specie, numerus laterum negatorum sit impar; species illa erit negata. Ut $Q: A+E-I: = Aq+2AE+Eq-2EI+Iq-2AI$. Et $C: A+E-I: = Ac+3AqE+3AEq+Ec-3EqI+3EIq-Ic-3AqI+3AIq-6AEI$.

Cap. XVIII.

Penus Analytica.

1 Ex primis ac facillimis æquationibus, quæ nihil aliud sunt, quàm vel terminorum expositiones, vel simplices effectiones (quales sunt illæ capitis XI, $\frac{1}{2}Z-E=\frac{1}{2}X$: & $\frac{1}{2}X+E=\frac{1}{2}Z$: & reliquæ cujusmodi) innumeræ aliæ deducuntur, per Additionem, Subductionem, multiplicationem, Divisionem, Transpositionem, atque Interpretationem: sumendo id quod alteri inventum est æquale, loco ejus cui æquatur. Quæ quidem Analytica supellex est, non minùs pretiosa, quàm copiosa. Quarum ego præcipuas aliquot, & maximè necessarias adscribam: plures Analytices studiosus pro suo exercitio excogitabit. Et ubicunque

ſive in Arithmetica, ſive in Geometria, ſive in alia aliqua arte, incideret in magnitudinem aliquam, cui altera æqualis eſſe intelligitur; æqualitatem illam quibuſcunque poterit modis atque comparationibus, torquebit, diſcutiet, variabit, ut novum inde artis inſtrumentum inveniat: quod poſtea in penu ſervabit: & ubicunque poterit in uſum proferet, ad artis ſubſidium atque augmentum.

2/. $Q:1:=9Q:\frac{1}{3}$. &c.	$C:1:=27\,C:\frac{1}{3}$: &c
$Q:1:=\frac{1}{9}Q:3$. &c	$C:1:=\frac{1}{27}C:3$: &c
$Q:1:=\frac{9}{4}Q:\frac{2}{3}$. &c	$C:1:=\frac{27}{8}C:\frac{2}{3}$: &c
$\frac{2}{3}Q:1:=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}Q:\frac{2}{3}$: &c	$\frac{2}{3}C:1:=\frac{2}{3}\times\frac{27}{8}C$: &c
$\frac{2}{3}Q:4:=\frac{2\times16}{3}Q:1$. &c	$\frac{2}{3}C:4:=\frac{2\times64}{3}C:1$: &c

3 Si linea biſecetur, & ſecùs; rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti atque interſegmenti: hoc eſt ſemiſummæ atque ſemidifferentiæ ſegmentorum. 5 e 2. $AE=Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E$: mi $Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$: hoc eſt, $AE=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq$.

4 Si linea biſecta augeatur; rectangulum ſub tota aucta & augmento, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti aucti, atque biſegmenti. 6 e 2. $A+E$ in $E=Q:\frac{1}{2}A+E$: mi $Q:\frac{1}{2}A$. Et $A+E$ in $A=Q:\frac{1}{2}E+A$: mi $Q:\frac{1}{2}E$.

Datis igitur ſumma trium ∻ $(Aq+AE+Eq)$ cum alterutro extremorum, dantur duo reliqui. Nam

$\sqrt{u}: Aq+AE+Eq-\frac{3}{4}Aq$: mi $\frac{1}{2}A=E$.

$\sqrt{u}: Aq+AE+Eq-\frac{3}{4}Eq$: mi $\frac{1}{2}E=A$.

5 Si

5 Si linea ſecetur utcunque; ſumma quadratorum totius, & unius ſegmenti, æquatur aggregato quadrati alterius ſegmenti, & duplicis rectanguli ſub tota & priore ſegmento, 7 e 2. $Zq+Aq=2ZA+Eq$. Et $Zq+Eq=2ZE+Aq$. Quare $2ZA+Eq-Aq=Zq=2ZE+Aq-Eq$.

6 Si linea utcunque ſecta, augeatur alterutro ſegmento; Quadruplex rectangulum ſub ſecta, & ſegmento augente, æquatur differentiæ quadratorum totius auctæ, & alterius ſegmenti. 8 e 2.

$Q:Z+E:-Aq=4ZE$. Et $Q:Z+A:-Eq=4ZA$.

7 Si linea biſecetur, & ſecùs; ſumma quadratorum ſegmentorum inæqualium, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti, & interſegmenti. 9 e 2. $Aq+Eq=2Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E:+2Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$.

8 Si linea biſecta augeatur; ſumma quadratorum totius auctæ & augmenti, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti aucti, & biſegmenti. 10 e 2.

$Q:A+E:+Eq=2Q:\frac{1}{2}A+E:+2Q:\frac{1}{2}A$.

$Q:A+E:+Aq=2Q:\frac{1}{2}E+A:+2Q:\frac{1}{2}E$.

9 $Aq=ZA-AE=XA+AE=\frac{1}{2}ZA+\frac{1}{2}XA=Q:Z-E:=Q:E+X:=Z-Eq=Eq+X$.

Et $Eq=ZE-AE=AE-XE=\frac{1}{2}ZE-\frac{1}{2}XE=Q:Z-A:=Q:A-X:=Z-Aq=Aq-X$.

10 $Æ=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq=ZA-Aq=ZE-Eq=Aq-XA=Eq+XE=\frac{1}{2}Zq-\frac{1}{2}Z=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}Xq=\frac{1}{2}ZA-\frac{1}{2}XA=\frac{1}{2}ZE+\frac{1}{2}XE$.

11. Z ≐ Aq+Eq = Zq - 2AE = 2AE+Xq = ZE+XA = ZA-XE = 2Q:½Z:+2Q:½Z-E: = Q:A-2N:+Q:2M-E: = ½Zq+½Xq = 2Q:½Z:+2Q:½X: Consectarium ex his duabus ultimis æquationibus : Si magnitudo constet ex quadratis binarum magnitudinum : ejus etiam duplum constabit ex duobus quadratis, summæ scil: & Differentiæ. Et dimidium ejus constabit ex duobus quadratis, semisummæ scil: & Semidifferentiæ.

Et X = Aq-Eq = ZX = 2XA-Xq = 2XE+Xq = ZA--ZE = XA+XE = Zq-2ZE = ZA+XE—2Æ = XA+2Æ-ZE = Q:A+2N: mi Q:2M+E.

12. Q:½A+½E: = Q:½A-½E:+Æ.

Et Q:½A-½E: = Q:½A+½E:-Æ.

13. 2A+2E in A = 2Aq+2AE = Zq+X.

Et 2A-2E in A = 2Aq-2AE = X+Xq.

Et 2A+2E in E = 2AE+2Eq = Zq-X.

Et 2A-2E in E = 2AE-2Eq = X-Xq.

14. Xq = ZqXq = Z+2Æ in Z-2Æ = Zq--4AqEq.

15. ZÆ = AqE+AEq. Et XÆ = AqE-AEq.

Et ZÆ = AcE+AEc. Et XÆ = AcE-AEc.

Quare Z+3ZÆ = Zc. Et X-3XÆ = Xc.

Et ZZ = Z+ZÆ = Ac+AqE+AEq+Ec.

Et ZX = X-XÆ = Ac-AqE+AEq-Ec.

Et XZ = X+XÆ = Ac+AqE-AEq-Ec.

Et XX = Z-ZÆ = Ac-AqE-AEq+Ec.

Hinc ZZ+XX = 2Z. Et XZ+ZX = 2X.

Et ZZ-XX = 2ZÆ. Et XZ-ZX = 2XÆ.

16 Si

16. Si in circulo ſit 7.22::δ.π::113.355: erit δ.π:: 2R.P: &

δ.π.:Rq.	Circul.	Et π. δ::	$\frac{1}{4}$Pq.	Circul.
δ.π::2Rc.	Cylind.	Et πq.δq::	$\frac{1}{4}$Pc.	Cylind.
δ.π::$\frac{4}{3}$Rc.	Sphær.	Et πq.δq::	$\frac{1}{6}$Pc.	Sphær.
δ.π::$\frac{2}{3}$Rc.	Con.	Et πq.δq::	$\frac{1}{12}$Pc.	Con.

17. Ad hæc oportet futuram Analyſtam Geometrica iſta, tum theoremata, tum problemata non ignorare.

Theor: 1. Triangula ſunt æqualia : Si in utroque, vel tria latera; vel duo latera cum angulo comprehenſo; vel duo latera cum angulo eidem lateri oppoſito; vel duo anguli cum latere interjacente; vel duo anguli cum latere eidem ſubtenſo; æquentur. 4,8,26, e 1.

Theor: 2. Triangula plana ſunt ſimilia : Si vel ſint æquiangula; vel lateribus omnibus proportionalia; vel habeant unum angulum æqualem, & alterum angulum crurum proportionalium, & angulum tertium homogeneum. 4,5,6.7, e 6.

Theor: 3. In omni triangulo, majus latus majorem angulum ſubtendit; & minus minorem; & æquale æqualem. 18, 19 e 1.

Theor: 4. Duæ rectæ lineæ ſunt parallelæ: Si recta ipſas ſecans æquales fecerit, vel angulos alternos; vel externum & internum oppoſitum; vel duos internos ex eâdem parte duobus rectis. Et contra. 27, 28,29,30, e 1. Nam lineæ rectæ parallelæ ſunt inſtar unius lineæ latæ.

 Theor:

Theor: 5. Trianguli tres anguli simul, æquantur duobus rectis: Et externus angulus duobus internis oppositis. 32 e 1.

Theor: 6. Si rectam in circulo inscriptam, recta è centro bisecet: ad angulos rectos ipsam secat. 3 e 3.

Theor: 7. Perpendicularis super finem diametri, circulum tangit. 16,18,19,e 3.

Theor: 8. Angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam. 20 e 3.

Theor: 9. In eodem, vel æqualibus circulis, anguli super equalibus peripheriis, sunt æquales. 21 e 3.

Theor: 10. Angulus in semicirculo est rectus. 31 e 3.

Theor: 11. Si è puncto in peripheria circuli ducantur binæ rectæ lineæ, una circulum tangens, altera secans: anguli inter ipsas comprehensi mensura, æqualis erit semiperipheriæ abscissæ. pro: 32 e 3.

Theor: 12. Triangula, sive parallelogramma, æquialta, vel inter easdem parallelas, sunt ut bases. 35,36, 37,38, e 1. & 1 e 6.

Theor: 13. Recta bisecans angulum trianguli, secat basem ratione crurum 3 e 6.

Theor: 14. Triangulum rectangulum quodvis notetur literis A B C: sicut A sit angulus rectus: & B A Basis: & C A Cathetus: B C Hypotenusa.

Theor: 15. In triangulo rectangulo plano, perpendicularis ex angulo

gulo

gulo recto in Hypotenusam, dividit triangulum in duo triangula, tum toti, tum sibi ipsis similia. 8 e 6.

BC. BA. CA :: BA. BP. AP :: CA. AP. CP.
Hypotenusæ Bases, Catheti.

Unde sequitur.

1° Perpendicularem esse mediam proportionalem inter segmenta Hypotenusæ. Ideoque Quadratum perpendicularis æquale esse rectangulo sub segmentis. Scil: ∺ BP, AP, CP. Et APq = BP * CP.

2° Basem esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Basi conterminum. Scil: ∺ BC, BA, BP.

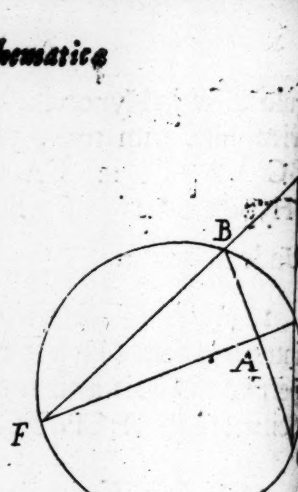
3° Cathetum esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Catheto conterminum. Scil: ∺ BC, CA, CP.

4° Basis & Catheti quadrata, esse ut segmenta Hypotenusæ contermina. BP. CP :: BAq. CAq.

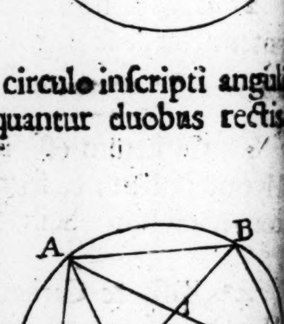
5° Quadratum Hypotenusæ æquari quadratis Basis & Catheti simul. BCq = BAq + CAq.

Theor: 16. Si in circulo duæ rectæ inscriptæ sese mutuò intersecent intra circulum (in puncto A) rectangulum sub segmentis unius, æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 35 e 3.

Si verò sese extra circulum intersecent (in puncto E) Rectangula sub segmentis utriusque à puncto ad convexum & concavum circuli, sunt æqualia. 36 & 37 e3. Dico primò $AB \times AC = AD \times AF$. Nam tri: BAF, DAC sim. Dico secundò $EB \times EF = ED \times EC$. Nam tri: BEC, DEF sim.

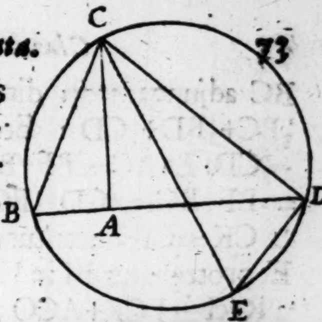


Theo: 17. Quadrilateri in circulo inscripti anguli interiores oppositi simul æquantur duobus rectis 22 e 3. Et si ducantur duo diagonii, rectangulum sub diagoniis, æquale erit duobus rectangulis sub lateribus oppositis, Dico $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. Nam tri: ACB, ADE sim. & ADC, AEB sim.



Quare $\left\{ \begin{array}{l} AC.\ CB :: AD.DE \\ AC.CD :: AB.BE \end{array} \right\}$ ergo,

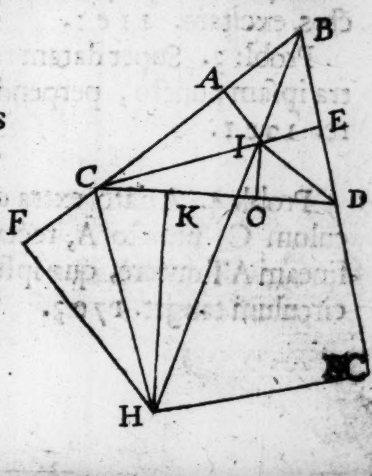
Theor: 18. Si ex angulo quovis trianguli circulo inscripti, demittatur perpendicularis in latus oppositum



tum : Erit ut perpendicularis illa, ad unum crus ejuſdem anguli : ſic crus alterum, ad diametrum circuli. Dico CA. CB::CD.CE. Nam tri : ACB, DCE ſim.

Theor: 19. Triangula unum angulum æqualem habentia rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Theor: 20. Si ſemiſumma trium laterum trianguli plani, & tres differentiæ trium laterum ab illa ſemiſumma, continuè inter ſe multiplicentur : Vel aliter, ſi trianguli quovis latere ſumpto pro baſe, & reliquis duobus pro cruribus ; Rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia ſummæ crurum & baſis, ducatur in rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia baſis & differentiæ crurum : Facti latus quadratum æquale erit areæ trianguli, eſto triangulum BCD, cujus crura ſint BC & BD, & baſis CD. Biſecentur tres anguli rectis BI, CI, DI, concurrentibus in I: unde in latera ad angulos rectos ducantur IA, IE, IO. Sunt igitur intra triangulum BCD, tria paria triangulorum æqualium. Quare ſi cruri



BC adjungatur in directum $CF = DE$; erit $BF =$ $\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD$: Et $BA = BF - CD = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD$ $- \frac{1}{2}CD$: Et $AC = BF - BD = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}BD$: Et C[F] $= BF - BC = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD$. Mensuratis $BG = B$[F] & $CK = CF$: ducantur perpendiculares FH, GH, KH: Et protrahatur BI in H. Quia ang: $FCK + FHK =$ 2 Rect $= FCK + ACO$: Et ang: $ACO + AIO = 2$ Rect: Erunt quadrangula FCKH, AIOC sim. Et tri: CFH, IAC sim. Sunt etiam tri: BAI, BFH sim. His expositis, Dico Quadratum arræ trianguli, nempe BFq $IAq = BF \times BA \times AC \times CF$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nam } IA.BA :: FH.BF \\ \text{Et } IA.AC :: CF.FH \end{array}\right\} \text{propter tri: sim.}$$

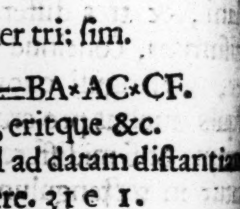
Quare per multipl: $IAq \times BF = BA \times AC \times CF$.

Ducatur utraque pars in BF, eritque &c.

Probl: 1. A dato puncto, vel ad datam distantia[m] datæ rectæ lineæ parallelam ducere. 31 e 1.

Probl: 2. Data recta linea, à dato in ea punct[o] rectam lineam perpendicularem, sive ad angulos r[e]ctos, excitare. 11 e 1.

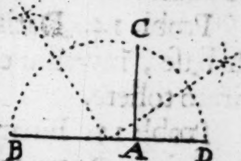
Probl: 3. Super datam rectam lineam, à dato e[x]tra ipsam puncto, perpendicularem rectam demitt[e]re. 12 e 1.



Probl. 4. A dato extra circulum C, puncto A, rectam lineam AT ducere, quæ ipsum circulum tangat. 17 e 3.

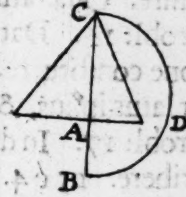
Probl: 5. Tribus rectis lineis datis, quartam proportionalem adinvenire. 12 e 6.

Probl: 6. Datis duabus rectis lineis AB, AD, mediam continuè proportionalem AC, adinvenire. 13 e 6.



Probl: 7. Datis duabus rectis lineis AB, AC, vel AD, AC, tertiam continuè proportionalem AD, vel AB, adinvenire. 11 e 6.

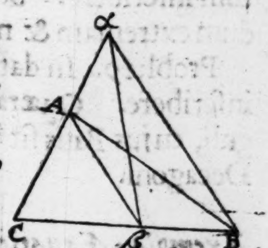
Probl: 8. Dato triangulo, cujus altitudo est AC, & semibasis AB, æquale quadratum ADq, constituere.



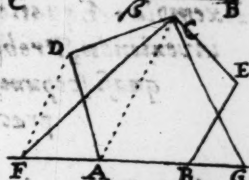
Probl: 9. Dato rectangulo aliud rectangulum æquale, ad datum latus, statuere. 14 e 6.

Probl: 10. Triangulo dato aliud triangulum æquale, ad datam altitudinem constituere.

Ex punctis altitudinum A & α, in angulos oppositos linea Aβ & αB, ductæ, sint parallelæ.



Probl: 11. Dato polygono æquale triangulum constituere.



Probl: 12. Datis tribus punctis, non in directum positis, ducere circumferentiam. 25 e 3.

Probl: 13.

Probl: 13. Datis trianguli rectanguli base & Catheto, invenire hypotenusam; vel quadratum quadrato addere.

Probl: 14. Datis trianguli rectanguli hypotenusa & base, invenire cathetum: vel quadratum ex quadrato tollere.

Probl; 15. Binarum figurarum similium rationem invenire. Quæratur tertia proportionalis.

Probl: 16. Datæ figuræ similem figuram, in data ratione constituere. Quæratur media proportionalis inter latus ipsius, & latus simile.

Probl: 17. In dato circulo hexagonum ordinatum inscribere. 15 e 4.

Probl: 18. In dato circulo Decagonum ordinatum inscribere. Secetur semidiameter circuli secundum extremam & mediam rationem, per 11 e 2.

Probl: 19. In dato circulo Pentagonum ordinatum inscribere. Quæratur Hypotenusa trianguli rectanguli, cujus Basis sit latus Hexagoni, & Cathetus latus Decagoni.

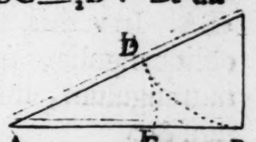
Cap. XIX.

Exempla Æquationis Analyticæ, pro Theorematibus inveniendis, Problematibusque solvendis. ad quem quasi scopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.

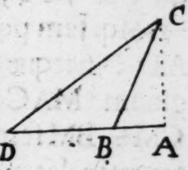
Probl: I. INventio 11 e 2. Nempe, Data recta linea B secetur sic ut rectangulum sub tota B, & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti.

Ponatur majus segmentum A : minus erit B-A. ducatur B-A in B: fietque $Bq-BA=Aq$: vel $Aq+BA=Bq$. Quare $\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$: $-\frac{1}{2}B=A$, per 9 cap. 16. Quod Theorema verbis enunciatur sic : Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipsius quadrans : & è latere quadrato summæ, tollatur semis lineæ datæ : reliquum erit segmentum majus.

Geometricè autem construetur, sic, Fiat $AB=B$: eique ad angulos rectos statuatur $BC=\frac{1}{2}B$: Et ducatur Hypotenusa AC : erit $AC=\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$. Abscindatur $CD=BC$: Eritque residuum $AD=\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$: $-\frac{1}{2}B$. Denique mensuretur $AE=AD$, pro majore segmento.



Probl: II. Inventio 12 e 2. Nempe comparatio Basis obtusi anguli, cum lateribus. Estò triangulum BCD : cujus angulus interior ad B, sit obtusus : hujus Basis est DC: & latera BD, BC. Hic $BCq-BAq=CAq=DCq$ ($-DAq$, per 4 e 2) $-BDq-2BD \times BA-BAq$. Quare $BCq+BDq=DCq-2BD \times BA$.

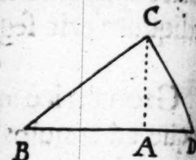


Quod theorema verbis enuntiatur, sic : In amblygoniis triangulis, quadratum lateris subtendentis obtusum angulum, excedit summam quadratorum laterum eundem comprehendentium, duplice rectangulo

sub

ſub uno laterum circa obtuſum angulum, & ſegmento ipſius inter obtuſum angulum & perpendiculum.

Probl: III. Inventio 13 e 2. Nempe comparatio Baſis acuti anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit acutus. hujus Baſis eſt DC: & latera BC, BD. Hîc BCq-BAq=CAq=DCq (-DAq, per 7 e 2) -BDq+2BD×BA-BAq. Quare BCq+BDq=DCq+2BD×BA. In verbis, ſic, In triangulis obliquangulis, quadratum lateris ſubtendentis acutum angulum, minus eſt ſumma quadratorum laterum &c.



Probl: IV. Inventio 14 e 2: Nempe quadrati æqualis rectangulo AB×AD. Eſto AB+AD=2BM. Quare AB+AD ſecatur æqualiter in M, & inæqualiter in A. Erit igitur per 5 e 2, AB×AD=BMq-AMq. Jam ponatur ACq=AB×AD: fiatque triangulum rectangulum MAC cujus hypotenuſa CM=BM ſemiſummæ laterum; & baſis AM ſemidifferentiæ laterum: Cathetus erit AC latus quadrati quæſiti, per 48 e 1.

Inventio areæ trianguli plani.

Probl: V. Attulit ad me amicus quidam meus, vir doctus, Theorema de areâ trianguli plani; atque ut id examinarem, & demonſtratione munirem, poſtulavit.

Erit

Erat autem Theorema, prout memini (nam multi jam elapsi sunt anni) hâc ferè formâ, licet non in iisdem literis.

In triangulo plano cujus latera sunt A,E,B;
$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{8}BqEq-\frac{1}{16}Eqq\\ \frac{1}{8}EqAq-\frac{1}{16}Aqq\\ \frac{1}{8}AqBq-\frac{1}{16}Bqq\end{array}\right\}$$
æquantur quadrato areæ trianguli.

Postquam aliquamdiu mecum cogitassem, occurrit mihi 17,c 18, Theor: 20, quod commodissimum huic nodo solvendo duxi. Nam si trianguli duo crura sint A, E; & basis B: inde liquebit, quod $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$, in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E$, æquatur quadrato areæ trianguli. Factâ igitur harum quatuor magnitudinum continuâ multiplicatione; prodibit $\frac{1}{8}AqEq+\frac{1}{8}AqBq+\frac{1}{8}EqBq-\frac{1}{16}Aqq-\frac{1}{16}Eqq-\frac{1}{16}Bqq$: Quod est ipsum Theorema propositum.

Atque hinc non solum postulato satisfeci; sed etiam quatuor alia Theoremata effectu faciliora exhibui. Nam quia $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$: Et $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B$. Et quia $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$: Et $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X$: Erit $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$. Et $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$ in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X=\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq$. Liquet igitur primò, $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq=Q$: areæ trianguli. In verbis sic, Si quadrans differentiæ quadratorum summæ crurum & basis ducatur in quadrantem differentiæ quadratorum basis & differentiæ crurum; producta magnitudo æqualis erit quadrato Areæ trianguli.

Deinde

Deinde quia $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Bq$ in $\frac{3}{4}Bq - \frac{1}{4}Xq = \frac{1}{16}ZqBq + \frac{1}{16}$ $BqXq - \frac{1}{16}Bqq - \frac{1}{16}ZqXq$: Liquet ſecundò, $Zq + Xq - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi $\frac{1}{16}ZqXq = Q$: Areæ trianguli.

Item quia $Zq + Xq = 2Z$, per 11, c 18 : Et $ZqXq = Xq$, per 14, c 18 : Liquet tertiò $2Z - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi $Q: \frac{1}{4}X = Q$: Areæ trianguli.

Deniq; ex his comparatis, erit quartò $\left\{ \frac{2ZBq - Bqq - Xq}{16} \right. = Q$: Areæ tri

Hæc poſteriora Theoremata verbis facilè enunciantur.

Probl: VI. Problematum circa Progreſſionem Arithmeticam ſolutio in viginti Propoſitionibus. Symbola verborum hæc ſint: α primus terminus minimus. ω ultimus maximus. T numerus terminorum. X differentia communis. Z ſumma omnium terminorum. Eſt igitur $T - 1$ numerus differentiarum: ideoque $TX - X = \omega - \alpha$, ſumma differentiarum.

Datis tribus ex quinque illis α, ω, T, X, Z, inveniuntur duo reliqua per viginti propoſitiones ſequentes (tot enim ſunt varietates) hoc ordine.

Datis	Quæruntur	Per Propoſiti:
α, ω, T	Z & X	1 & 2
α, ω, X	T & Z	3 & 4
α, ω, Z	T & X	5 & 6
α, T, X	ω & Z	7 & 8
α, T, Z	ω & X	9 & 10

Datis

Datis	Quæruntur	Per Propositio:
α, X, Z	ω & T	11 & 12
ω, T, X	α & Z	13 & 14
ω, T, Z	α & X	15 & 16
ω, X, Z	α & T	17 & 18
T, X, Z	α & ω	19 & 20

Prop: I. $T\omega + T\alpha = 2Z$.

II. $\frac{\omega - \alpha}{T - 1} = X$.

III. $\frac{\omega - \alpha}{X} + 1 = T$. per 2.

IIII. $\frac{\omega q - \alpha q}{X} + \omega + \alpha = 2Z$. per 1. 3.

V. $\frac{2Z}{\omega + \alpha} = T$. per 1.

VI. $\frac{\omega q - \alpha q}{2Z - \omega - \alpha} = X$. per 4.

VII. $TX - X + \alpha = \omega$. per 2.

VIII. $TX - X + 2\alpha$ in $X = 2Z$. per 1 & 7.

IX. $\frac{2Z - T\alpha}{T} = \omega$. per 1.

X. $\frac{2Z - 2\alpha}{Tq - T} = X$. per 8.

XI. $\left.\begin{array}{l}\sqrt{u}: \frac{1}{4}Xq + 2ZX + \alpha q \\ -X: \text{minus } \frac{1}{2}X\end{array}\right\} = \omega$. per 4.

XII. Si $B = 2\alpha - X$, erit
$\sqrt{u}: \frac{Bq}{4Xq} + \frac{2Z}{X}: \text{mi}\frac{B}{2X} = T$. per 8.

XIII. $\omega + X - TX = \alpha$. per 7.

XIV. $2\omega + X - TX \text{ in } T = 2Z$. per 1 & 13.

XV. $\frac{2Z}{T} - \omega = \alpha$. per 9.

XVI. $\frac{2T\omega - 2Z}{Tq - T} = X$. per 14.

XVII. $\left.\begin{array}{l}\sqrt{u}: \frac{1}{4}Xq + \omega q + X\omega \\ -2ZX: \text{plus } \frac{1}{2}X\end{array}\right\} = \alpha$. per 4.

XVIII. $\left.\begin{array}{l}\frac{2\omega + X}{2X} \text{ minus } \sqrt{u}: \\ \frac{4\omega q + 4X\omega + Xq - 2Z4X}{4Xq}\end{array}\right\} = T$. per 14.

XIX. $\frac{2Z}{2T} - \frac{TX}{2} + \frac{X}{2} = \alpha$. per 10.

XX. $\frac{2Z}{2T} + \frac{TX}{2} - \frac{X}{2} = \omega$. per 16.

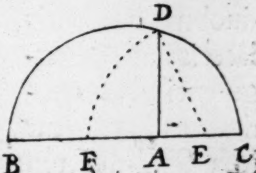
Probl: VII.

Probl: VII. Euclides 11 e 2, docuit secare lineam datam, sic, ut rectangulum sub tota & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti: quæ sectio est penè divina. Proponatur jam illud problema generaliter; ut data linea AB ita secetur, ut rectangulum sub tota AB, & minore segmento, ad quadratum majoris segmenti, rationem quamcunque possibilem datam habeat: puta R ad S.

Primo fiat R. S :: AB. AC: qui quartus sit proportionalis. tum pro majore segmento ponatur A: minus segmentum erit AB−A: quod ductum in AB, dabit rectangulum ABq−AB*A. Erit igitur AB.AC :: ABq −AB*A. Aq. Ideoque per 3 cap:6, ABq*AC−AB *AC*A=AB*Aq. Et divisis omnibus per AB, erit AB*AC−AC*A=Aq: vel Aq+AC*A=AB*AC. Et per 9 cap:16, invenitur $\sqrt{}$u: $\frac{1}{4}$ ACq+AB*AC:−$\frac{1}{2}$AC =A.

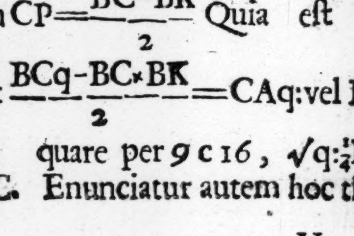
Hoc theorema inventum, verbis sic enuntiatur: Si ad quadratum semissis quarti proportionalis, adjungatur rectangulum sub linea recta data, & quarto illo proportionali; Et ex latere quadrato summæ tollatur semis quarti proportionalis: Reliquum erit segmentum majus.

Geometricè sic. Statuantur AB & AC in directum: Et diametro BC fiat semicirculus: Et super BC in puncto A, erigatur perpendicularis AD, secans semicirculum in D. tum bisecta AC in E, mensuretur



EF = ED. Dico lineam AB ſic ſecari in puncto F ut ſit R.S :: AB×BF. AFq. Nam AC×AF+AC×BF = AC×AB = ADq = CF×AF, per 6 c 2, = AC×AF+AFq. Quare AC×BF = AFq. Atqui AB.AC :: AB×BF.AC×BF. Ergo,

Prob: VIII. Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto ſecat hypotenuſam) una cum BK differentia ſegmentorum hypotenuſæ, invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum. Primò detur latus minus CA. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC: in quo è vertice in hypotenuſam demittatur perpendicularis AP, ſecans hypotenuſam in BP & CP ſegmenta. Eſt autem $CP = \frac{BC - BK}{2}$ Quia eſt BC. CA :: CA. $\frac{BC-BK}{2}$ erit $\frac{BCq - BC \times BK}{2} = CAq$: vel $BCq - BK \times BC = 2CAq$. quare per 9 c 16, $\sqrt{q}:\frac{1}{4}BKq + 2CAq: + \frac{1}{2}BK = BC$. Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadratum ſemi-differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ addatur duobus quadratis lateris dati; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa ſemi-differentia: tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.



Ge

Geometricè sic. Ducatur CF: ipsique perpendicularis $FL = \frac{BK.}{2}$ & extendatur CL ad N, ut $LN = \frac{1}{2}BK$. Erit $CN = BC$. quare inscribatur circulo $CK = CN - BK$: & producatur, &c. Nam $CFq = 2CAq$. & $CLq = 2CAq + \frac{1}{4}BKq$. Ergo,

Si verò detur majus latus BA : hujusmodi invenietur æquatio, $\sqrt{q}: \frac{1}{4}BKq + 2BAq: - \frac{1}{2}BK = BC$. sumpta $\frac{BC+BK}{2}$ pro PB.

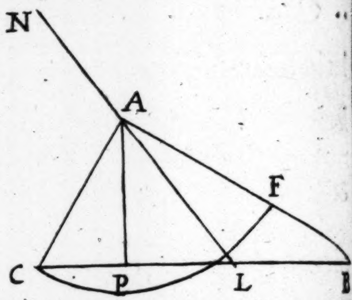
Et modus geometricus priori non absimilis.

Prob. IX. Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perpendiculari AP ab angulo recto in hypotenusam: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Pata factum esse quod postulatur : sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 7 e 2. $2BA \times AF + BFq = BAq + AFq$, Ideoque $BFq = (ABq + AFq$, hoc est$)$ $BCq - (BA \times 2CA$. hoc est$)$ $BC \times 2AP$, quia $BC . CA :: BA . AP$. Erit $BCq - 2AP \times BC = BFq$. quare per 9 c 16. $\sqrt{q} : APq + BFq : + AP = BC$.

69
46
529

G 3 Enunciatur



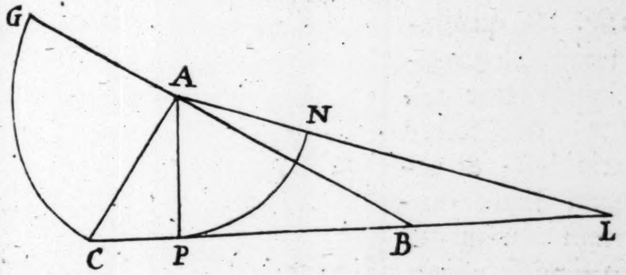
Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa perpendiculari: tota aucta æqulis erit hypotenuſæ.

Geometricè ſic. Fiat PL=BF. Et extendatur LA ad N, ut AN=AP. Erit LN=BC. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus; in quo ſtatuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA, & CA.

Probl: X. Datis ſumma laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenuſam, AP: invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 e 2, BGq =(BAq+GAq, hoc eſt) BCq+ (2BA×CA, hoc eſt) 2AP×BC, quia BC. CA :: BA. AP. Erit BCq +2AP×BC=BGq. quare per 9 c 16, √q: APq +BGq: - AP=BC.

Enunciatur



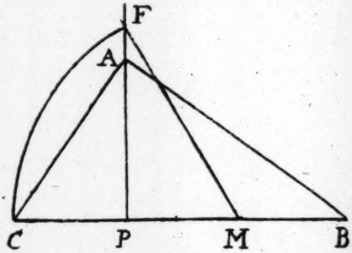
Enunciatur autem hoc theorema ſic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum ſummæ laterum; & aggregati latus quadratum minuatur ipſa perpendiculari: linea reliqua æqualis erit hypotenuſæ.

Geometricè ſic. Fiat $PL = BG$ & ducatur AL: ex qua abſcindatur $AN = AP$. Erit $LN = BC$. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus, &c.

Probl: XI. Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno ſegmento hypotenuſæ BP: invenire tum alterum ſegmentum, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt $BP + CP. CA :: CA. CP$. Erit $BP \times CP + CPq = CAq$. quare per 9 c 16, $\sqrt{q: \frac{1}{4} BPq + CAq:} - \frac{1}{2} BP = CP$.

Enuntiatur autem hoc theorema verbis sic. Si quadrato semissis segmenti hypotenusæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipso semisse: linea reliqua erit alterum hypotenusæ segmentum.



Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF = CA & bisecta BP in M, ducatur MF: cui mensuretur æqualis MC. Inventum est igitur CP alterum segmentum: & BC tota hypotenusa. Diametro BC describatur semicirculus: in quo inscribantur CA, & BA.

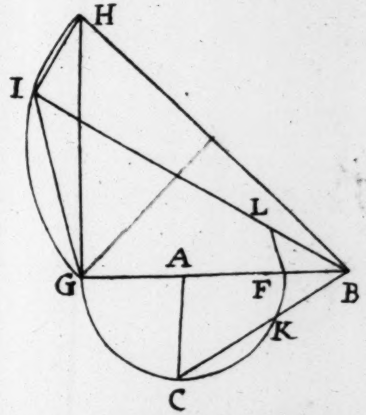
Probl: XII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & summa laterum, BG: invenire tum differentiam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BG.BK :: BC. BF: est etiam BGq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq + CAq. BFq. Item 2BGq − BKq. BKq :: (2BAq + 2CAq — BFq hoc est) BGq. BFq: Nam per 8 c 18 2BAq + 2CAq = BGq + BFq. quare √q: 2BGq — BKq. BG :: BK. BF :: BG BC.

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si

89

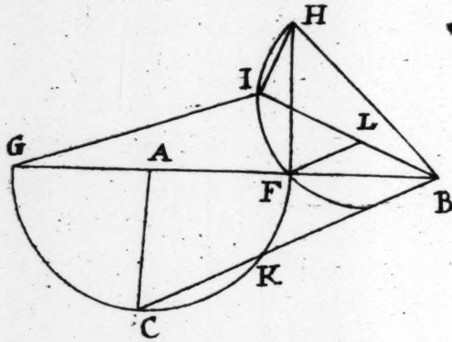
Si è quadrato summæ laterum duplicato tollatur quadratũ differentiæ segmentorum hypotenusæ: Erit ut latus quadratum reliqui, ad summam laterum; sic differentia segmentorũ hypotenusæ, ad differentiam laterum, & sic summa laterum ad hypotenusam.



Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH=BG. tum diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI=BK: & ducatur BI. Est igitur BI=√q: 2BGq—BKq. fiat etiam BL =BK. Ducatur GI: eique parallela LF. Ergo inventa est BF differentia laterum.

Probl: XIII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & differentia laterum BF: invenire tum summam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BF. BK :: BC. BG: est etiam BFq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq +CAq. BGq. Item 2BFq—BKq. BKq :: (2BAq +2CAq—BGq, hoc est) BFq.BGq: Nam per 8 c 18 2BAq+2CAq=BGq+BFq: √q: 2BFq—BKq.BF:: BK.BG::BF.BC. Enuncia-

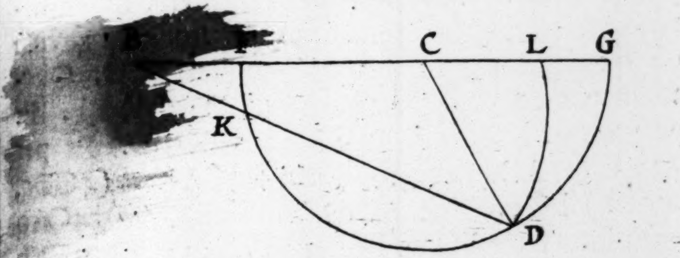


Ennunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ: Erit ut latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; ſic differentia ſegmentorum hypotenuſæ, ad ſummam laterum: & ſic differentia laterum, ad hypotenuſam.

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BF & FH=BF. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculus, in quo inſcribatur BI=BK: & ducatur HI. Eſt igitur HI=√q:2BFq—BKq: fiat BL=HI. Ducatur FL: eique parallela IG. Ergo inventa eſt BG ſumma laterum.

Probl. XIV. Datis trianguli plani cujuſcunque differentia laterum FB, differentia ſegmentorum baſis BK, & differentia inter majus latus & baſem CL: invenire tum baſem, tum ſummam laterum, tum ipſum triangulum. Et primò ſit exceſſus penes baſem. Puta factum

factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est FB.BK :: BD. $\frac{BK \times BD}{BF} = BG$, per 17 c 18, Th: 16. Erit $\frac{BK \times BD - BFq}{2BF} = CF$. adde BF, & $\frac{BK \times BD + BFq}{2BF} = BC$. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF \times BD - BK \times BD - BFq}{2BF} = \frac{2BF \times CL:}{2BF}$ Quare $2BF \times BD - BK \times BD = 2BF \times CL + BFq$. & per 3 c 6. $2BF - BK . 2CL + BF :: BF . BD :: BK . BG$.



Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. ut differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentiam segmentorum basis, est ad aggregatum differentiæ inter majus latus & basim duplicatæ, & differentiæ laterum ;. sic differentia laterum, ad basem : & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometrica praxis facilior est, quàm ut necesse sit apponi.

Si

Si verò exceſſus fuerit penes majus latus : theorema erit, $BK-2BF.\ 2CL-BF :: BF.\ BD :: BK.BG.$

Hujus theorematis inveſtigationem; & problematis quo è datis trianguli plani cujuſcunque ſumma laterum BG, differentia ſegmentorum baſis BK, & differentia inter majus latus & baſem CL. poſtulatur invenire tum baſem, tum differentiam laterum, ſolutionem, omitto : ut habeant ſtudioſi analyſeos, quo ſolertiam ſuam exerceant.

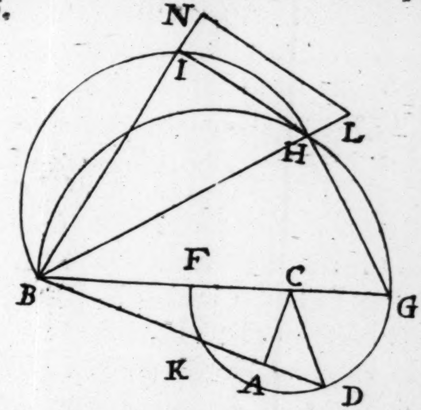
Probl:XV. Datis trianguli plani cujuſcunque ſumma laterum BG, differentia ſegmentorum baſis BK,& perpendiculari CA : invenire tum baſem, tum differentiam laterum, tum ipſum triangulum. Puta factum eſſe quod poſtulatur : ſitque triangulum BCD. Quoniam per 17 c 18 Th: 16. $BG.BD :: BK.BF.$ Et per 5 c 18, $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD.$ Et per 47 e 1 (4 ADq hoc eſt) $DKq + 4CAq =$ (4CDq, hoc eſt) FGq. Erit $BDq+BKq-2BK \times BD+4CAq = FGq.$ Tolle FG ex BG:& $BG - \surd q : BDq+BKq - 2BK \times BD+4CAq := BF.$ Quare erit,

$BG.BD :: BK.\ BG - \surd q : BDq+BKq - 2BK \times BD + 4CAq.$ Et per 3 c 6, $BK \times BD = BGq - \surd q : BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq.$ Eſt igitur per 8 c 16 Q : $BGq - BK \times BD$, hoc eſt, $BGqq - BGq \times 2BK \times BD + BKq \times BDq = BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq.$

Ideóque $BGq \times BDq - BKq \times BDq = BGqq - BGq \times BKq - BGq \times 4CAq.$ vel etiam, $BGq - BKq$

in

in BDq = BGq — BKq - 4CAq in BGq. Ergo √q: BGq - BKq. √q: BGq - BKq — 4CAq :: BG.BD :: BK.BF.



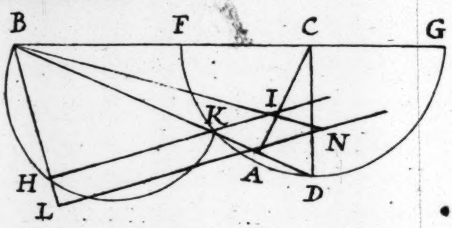
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic, ut latus quadratum differentiæ inter quadrata summæ laterum, & differentiæ segmentorum basis, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ multatæ quadrato perpendiculi duplicati; sic summa laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad differentiam laterum.

Geometricè sic. Diametro BG describatur semicirculus: in quo inscribatur GH = BK: & BH. Est igitur BH = √q : BGq — BKq, Rursus diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = 2CA: & BI. Est igitur BI = √q: BGq - BKq — 4CAq. Fiat BL = BG: & ab L ducatur LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN = BD.

Probl:

Probl: XVI. Datis trianguli plani cujuscunque differentia laterum BF, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum summam laterum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est BG.BD::BK.BF. Et DKq = BDq + BKq − 2BK × BD, per 5 c 18. Et per 47 e 1, (4ADq, hoc est) DKq + 4CAq = (4CDq, hoc est) FGq. Erit BDq + BKq − 2BK × BD + 4CAq = FGq. Adde FG ad BF: Et BF + √q: BDq + BKq − 2BK × BD + 4CAq = BG. Quare BF. BD :: BK. BF + √q: BDq + BKq − 2BK × BD + 4CAq. Item BK × BD = BFq + √q: BFq × BDq + BFq × BKq − BFq × 2BK × BD + BFq × 4CAq. Est igitur Q: BK × BD − BFq, hoc est, BKq × BDq − $\overline{\text{BFq} \times \text{2BK} \times \text{BD}}$ + BFqq = BFq × BDq + BFq × BKq $\overline{-\text{BFq} \times \text{2BK} \times \text{BD}}$ + BFq × 4CAq. Ideoque BKq × BDq − BFq × BDq = BFq × BKq − BFqq + BFq × 4CAq. vel etiam BKq − BFq in BDq = BKq − BFq + 4CAq in BFq. Ergo √q: BKq − BFq. √q: BKq − BFq + 4CAq :: BF.BD::BK.BG.



Enunciatur

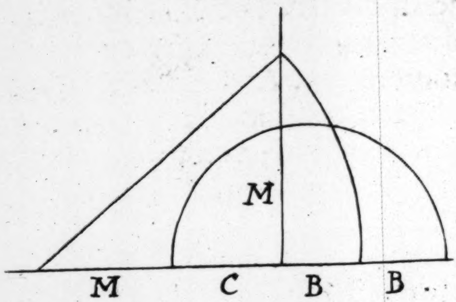
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. ut latus quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ segmentorum basis, & differentiæ laterum, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ auctæ quadrato perpendiculi duplicati; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometricè sic. Diametro BK describatur circulus: in quo inscribatur $KH = BF$: & BH. Est igitur $BH = \sqrt{q} : BKq - BFq$. Fiat $BHL = BF$: & $HKI = 2CA$. Ducatur BI. Est igitur $BI = \sqrt{q} : BKq - BFq + 4CAq$. Ducatur etiam LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est $BN = BD$.

Probl: XVII. Datis in triangulo rectangulo differentia inter basem & hypotenusam B, & differentia inter cathetum & hypotenusam C: invenire tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Pro hypotenusa ponatur A. Basis erit $A - B$. & Cathetus $A - C$. & per 47 e 1, Cathetus est $\sqrt{q} : 2BA - Bq$. Quare $\sqrt{q} : 2BA - Bq = A - C$. Et $2BA - Bq = Aq - 2CA + Cq$. vel $2B + 2C$ in A mi $Aq = Bq + Cq$. Ergo per 9 c 16, $B + C + \sqrt{q} : 2BC = A$, hypotenusæ.

Enunciatur



Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Aggregatum utriusque differentiæ (tum basis tum catheti) ab hypotenusa. unâ cum $\surd q$ duplicis rectanguli sub ipsis differentiis, æquatur hypotenusæ.

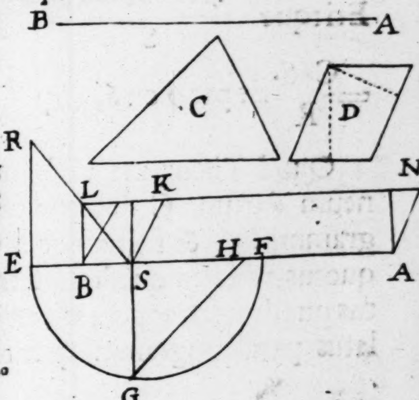
Geometricè sic. Ducatur linea infinita in qua mensurentur B, B, & C. hac diametro fiat semicirculus. Et in communi B & C termino statuatur ad angulos rectos linea M. Est igitur $Mq = 2BC$. mensuretur etiam M in linea infinita post C. Et semidiametro $M+C+B$ describatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. tum à puncto concursus ad centrum illius arcus ducatur linea pro hypotenusa. Et descriptum erit triangulum rectangulum quæsitum.

Probl: XVIII. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem datum rectilineum non majus esse eo, quod ad dimidium adplicatur. Prop: est 28 è 6.

In parallelogrammo D, notetur lineis perpendicularibus ejus Altitudo R, & Latitudo S: nec refert utra ex ipsis ſtatuatur major.

Ponatur latus parallelogrammi quæſiti A : portio ablatitia erit AB - A. Fiat S.R :: AB - A. $\frac{AB \times R - R \times A}{S}$ altitudo parallelogrammi quæſiti: Ducatur in A latus: eritque $\frac{AB \times R \times A - R \times Aq}{S} = C$: vel $AB \times A - Aq = \frac{C \times S}{R}$ Et per 9, Cap:16, $\frac{AB}{2} + \sqrt{q}: \frac{ABq}{4} - \frac{C \times S}{R} := A$.

Quod Theorema verbis enuntiatur ſic. Si rectilineum C datum ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus dividatur per altitudinem : & quotus ex quadrato ſemiſſis lineæ AB datæ auferatur : latus quadratum reliqui auctum eodem ſemiſſe, erit latus parallelogrammi quæſiti.



Geometricè ſic : Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tum R.S :: ER. $ES = \frac{\sqrt{C}}{R}$ Statuantur ER & ES ad angulos rectos : Sumptaque SF = ER, diametro EF deſcribatur ſemicirculus : in quo erectâ perpendiculari SG erit $SGq = \frac{C \times S}{R}$.

Ex G puncto mensuretur $GH = \frac{1}{2} AB = HB$: erit $HS = \surd : \frac{ABq}{4} - \frac{C*S}{R}$: cui si adjungas $HA = \frac{1}{2} AB$; erit AS latus parallelogrammi quæsiti. Et $BS = AB - A$ portioni ablatitiæ. Et BL parallela lineæ ER, erit altitudo. Ergò parallelogrammum quæsitum est ASKN, factum ipsi D æquiangulum.

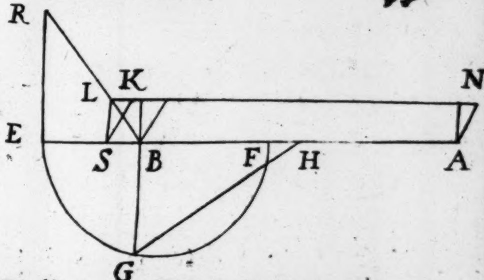
Probl: XIX. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato, Prop: est 29 e 6.

In parallelogrammo D notetur Altitudo & Latitudo, sicut in præcedente.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A : Portio adjectitia erit $A - AB$. Fiat $S . R :: A - AB . \frac{R*A - AB*R}{S}$ altitudo parallelogrammi quæsiti. Ducatur in A latus: Eritque $\frac{R*Aq - AB*R*A}{S} = C$. vel $Aq - AB*A = \frac{C*S}{R}$. Et per 9 c 16, $\surd q : \frac{ABq}{4} + \frac{C*S}{R} : + \frac{AB}{2} = A$.

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum datum C ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus per altitudinem dividatur: & quotus addatur quadrato semissis lineæ AB datæ: Latus quadratum aggregati, auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.

Geometrice



Geometricè sic. Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tum R.S :: ER.EB $= \frac{\sqrt{C \ast S}}{R}$. Statuantur ER & EB ad angulos rectos: Sumptaque $BF = ER$, diametro EF describatur semicirculus: in quo erecta perpendiculari BG, erit $BGq = \frac{C \ast S}{R}$. Esto $BH = \frac{1}{2} AB = AH$. Et ducatur GH $= \sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C \ast S}{R} = HS$: Est igitur $AS = A$ lateri parallelogrammi quæsiti: Et $BS = A - AB$ portioni adjectitiæ. Et altitudo erit SL parallela lineæ ER. Ergo parallelogrammum quæsitum est, ASKN factum ipsi D æquiangulum.

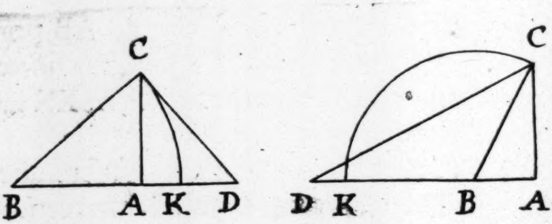
Probl: XX. Datis trianguli plani cujuscunque duobus lateribus BC BD, cum angulo B intercepto: invenire tertium latus, vel datis tribus lateribus: invenire angulum B, uni ipsorum oppositum.

Esto factum quod postulatur; sitque triangulum BCD. Centro B, semidiametro BC, describatur arcus CK: & perpendicularis CA. Est igitur KD differentia laterum: & AK similis sinui verso anguli B. Nam Rad. svB :: BK. AK. Estque $AK = \frac{BK \ast svB}{Rad.}$. Est autem etiam $AK = BK \mp BA$: ut ex schematibus comparatis liquet.

Et quia $BDq + BKq =$ tum
$\left\{ \begin{array}{l} 2BD \times BK + KDq. \text{ per } 5 \text{ c } 18 \\ CDq \pm 2BD \times BA. \text{ per } 2,3, \text{ c } 19 \end{array} \right\}$

Erit $2BD \times BK + KDq = CDq \pm 2BD \times BA.$ Quare $2BD \times BK \mp 2BD \times BA.$ hoc est, $2BD \times AK + KDq = CDq.$ at verò $2BD \times AK = \frac{2BD \times BC \times svB.}{Rad:}$

Ergo $\frac{2BD \times BC \times svB}{Rad:} + KDq = CDq.$ Quod est theorema primum. Et $\frac{CDq - KDq \text{ in } Rad:}{2BD \times BC} = sv\,B.$ Quod est theorema secundum.



Enunciatur quidem verbis primum theorema sic: Si duplicatum rectangulum sub lateribus datis ducatur in sinum versum anguli intercepti: & factus dividatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum æqualis erit quadrato tertii lateris.

Secundum verò sic: Si differentia quadratorum lateris oppositi, & differentiæ laterum, ducatur in Radium & factus dividatur per duplicatum rectangulum sub lateri-

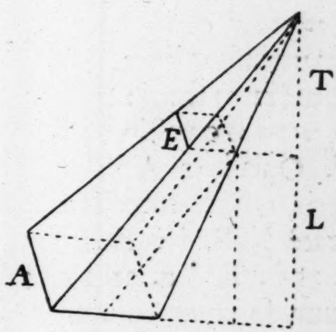
lateribus continentibus: Quotus æqualis erit ſinui verſo anguli quæſiti.

Probl: XXI. Datis fruſti Pyramidis utraque baſe Aq, Eq, & altitudine L: invenire menſuram fruſti.

Prænoſcendum eſt ex 7 & 10 e 12. quod parallelepipedon æquatur tribus pyramidibus; Et Cylindrus æquatur tribus conis, ejuſdem baſis & altitudinis.

Eſtque altitudo pyramidis abſciſſæ (T) primò quærenda, ſic, A—E. E::L. T. Quare $\frac{LE}{X} = T$. Et altitudo totius pyramidis eſt L+T. Item pyramis tota tripla eſt AqL+AqT. Et pyramis abſciſſa tripla eſt Eq T. Ergo triplum fruſtrum pyramidis eſt AqL +AqT−EqT.

Hoc theorema oſtendit unum modum commenſurandi fruſtum pyramidis: Enunciatur autem verbis ſic.



Si ſolidum ſub baſe majore & tota altitudine multetur ſolido ſub baſe minore & altitudine pyramidis abſciſſæ: reliqui triens æqualis erit fruſto.

Rursus quia 2 c 11. $Aq-Eq=ZX$: & $T=\frac{LE}{X}$ Erit $AqL+$ (ZEL, hoc est per 3 e 2) $AEL+EqL=AqL+AqT-EqT$. Ergo triplex frustum pyramidis est etiam $Aq+Eq+AE$ in L. hoc theorema docet alterum modum commensurandi frusti : enunciatur autem verbis sic.

Si aggregatum utriusque basis frusti pyramidis, & mediæ inter ipsas proportionalis, ducatur in altitudinem frusti: facti triens æqualis erit frusto.

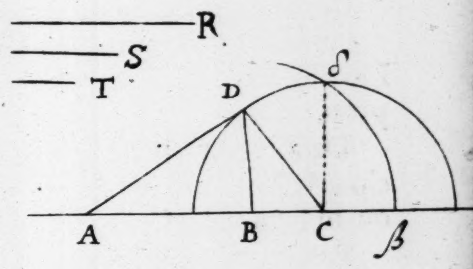
Item quia per 2 c 11, $2Aq+2Eq=Zq+Xq$: Erit $ZqL+XqL+2AEL$ æquale sex frustis. at per 11 e 18. $Xq+2AE=Z$. Ergo $Zq+Z$ in L æquale est sex frustis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commensurandi frusti pyramidis. Enuntiatur autem verbis sic. Si ad aggregatum basium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriusque basis, & summa eorundem ducatur in altitudinem frusti: facti sextans æqualis erit frusto.

At verò si quæstio sit de commensurando frusto Coni. Quia juxta Archimedæum inventum, semiperipheria circuli æqualis est $\frac{22}{7}$ Radii ferè : vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad : Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad: q. Et 113 . 355 :: Rad:q. area circuli. Quare Theorema primum de commensurando frusto coni, est $\frac{355}{452}$ $AqL+\frac{355}{452}AqT-\frac{355}{452}EqT$, æquatur triplo frusto. Secundum est $\frac{355}{452}Aq+\frac{355}{452}Eq+\frac{355}{452}AE$ in L, æquatur triplo frusto. Tertium est $\frac{355}{452}Zq+\frac{355}{452}Z$ in L, æquatur sextuplo frusto Coni.

Probl.

Probl: XXII. Problema Apolonii Pergæi ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A, B, describere circulum, in cujus circumferentiam rectæ lineæ, AD, BD, ab iisdem punctis ductæ, datam habeant rationem R ad S.

Puta factum esse quod quæritur; sitque circuli quæsiti centrum C in eadem recta linea cum punctis A, B; & semidiameter CD. Fiat R.S : : S.T. Quia triangula duo ACD, DCB (ubicunque sumitur punctum D) sunt ut AC ad BC: Et latera DA, DB, communi angulo C similiter opposita, sunt in ratione R ad S: & latus CD utrique commune: Non difficile erit concipere triangula ipsa ACD, DCB esse similia. Quare R, S : : DA. DB : : AC. DC : : DC. BC. Et per 1 c 15, AC. BC : : Rq. Sq : : R.T. Si igitur pro BC ponatur A : Erit AB+A. A : : R.T. Et AB×T+T×A = R×A: vel $\frac{AB \times T}{R - T}$ = A. Denique √: AC×BC: = DC.



Quæ enuntiatur verbis sic. Si punctorum intervallum ducatur in tertium rationis datæ terminis proportionalem: & factus dividatur per excessum termini primi supra tertium: Quotus æqualis erit distantiæ puncti citerioris à centro. Et latus quadratum

tum rectanguli ſub utraque diſtantia à centro, æquatur ſemidiametro. Geometrica effectio facillima eſt.

Probl: XXIII. Datis dolii, ſive vaſis vinarii, longitudine interna 2CL, & ſemidiametris tum medii CB, tum baſis LD: invenire dolii ipſius capacitatem. Eſt quidem dolium fruſtum ſphæroideos, quæ fit revolutione ſemiſſis ellipſeos ſuper diametrum ſuam tranſverſam ſive axim. Ad menſuram autem fruſti inveniendam, tum totius ſphæroideos, tum abſciſſarum portionum menſuras ſciri oportet: harum enim menſurarum differentia eſt menſura fruſti.

Soliditas totius ſphæroideos eſt $\frac{355}{113}$ BCq in $\frac{2}{3}$ IK: qui duplus eſt conus baſis BCB, & altitudinis IK: Archim: de conoid: & ſpæroid: prop. 29.

Soliditas verò portionis IED abſciſſæ habetur ſic: LK.LK+KC:: $\frac{355}{113}$ LDq in $\frac{1}{3}$ LI. Soliditas quæſita. Ibid. prop. 31.

Deſideratur autem adhuc (qui hujus negotii præcipuus eſt cardo) diameter tranſverſa ſive axis IK: quem ſic invenies.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: Et deſcribatur ellipſis: & reliqua; ſicut in ſchemate. Et fiat CK.

CB::CB. $\frac{CBq}{CK}$ = CR, quod eſt ſemilatus rectum per

13 l 1 conic: Apoll. Iterum fiat CK. $\frac{CBq}{CK}$ :: CK

+CL. $\frac{CBq \text{ in } CK+CL}{CKq}$ = LN. ducatur in IL, hoc

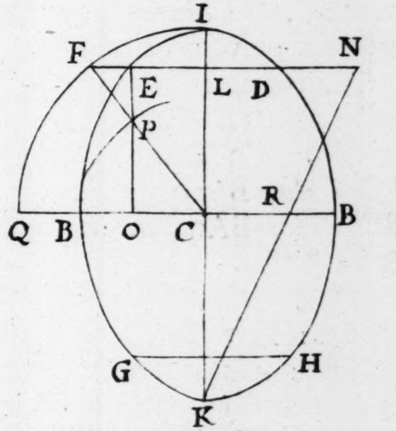
eſt CK—CL (quod idem eſt ac ſi ducatur CBq in

CKq

$CKq - CLq$ per 11 c 18) fietque $\dfrac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq}$

$= LEq$. per 13 l 1 conic: Apoll. Ergo $\sqrt{q}\,\dfrac{CBq \times CLq}{CBq - LEq}$

$= CK$, semi-axi; hoc est $\dfrac{CB \times CL}{OP} = CK$.



Quod theorema verbis enunciatur sic. Si quadratum semidiametri medii dolii ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus dividatur per differentiam quadratorum à semidiametris medii & basis: quoti latus quadratum erit semiaxis sphæroideos.

Geometricè sic. Ducatur EO parallela axi. Et semidiametro $CP = CB$ fiat arcus secans ipsam EO in P. continuetur CP donec concurrat cum base LE producta in F. Erit CF æqualis semiaxi quæsito.

Consectarium. Atque hinc patet meridianos in Analemmate esse veras Ellipses. verbi gratia, cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ: in quo descripta sit Ellipsis IEB. Dico eandem esse Meridianum. Nam cum

cum CQ sit quadrans Æquinoctialis, & FL quadrans paralleli: sitque meridianorum proprium secare Æquinoctialem, & omnes circulos ipsi parallelos, in segmenta similia, per 10, l 2 Theod: de sphæra. Si igitur constiterit esse CQ. CB :: LF. LE: Ellipsis IEB secans ipsos erit meridianus. At verò CF = CQ: & CP = CB: & OC = LE: Estque CF. CP :: LF. OC. Ergo,

Probl: XXIV. Datis trianguli rectanguli hypotenusa BC, & CM mediâ proportionali inter basem & cathetum; invenire triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam basis est BA, Cathetus erit $\sqrt{q}$: BCq - BAq: & rectangulum sub ipsis $\sqrt{q}$: BCq × BAq - BAqq: cujus latus quadratum est $\sqrt{qq}$: BCq × BAq - BAqq: media proportionalis inter basem & Cathetum.

Item quoniam Cathetus est CA, Basis erit $\sqrt{q}$: BCq - CAq. Et rectangulum sub ipsis, $\sqrt{q}$: BCq × CAq - CAqq: cujus latus quadratum est $\sqrt{qq}$: BCq × CAq - CAqq: media proportionalis inter basem & Cathetũ.

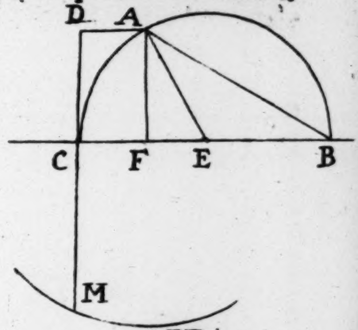
Quare BCq × BAq - BAqq = CMqq. Et
BCq × CAq - CAqq = CMqq.

$$\text{Ergo per 9c16, } \tfrac{1}{2}\text{BCq} \pm \sqrt{q}: \tfrac{1}{4}\text{BCqq} - \text{CMqq.} = \left.\begin{matrix}\text{BAq}\\ \text{CAq}\end{matrix}\right\}$$

Quod Theorema enuntiatur verbis sic. Si dimidiato hypotenusæ quadrato, latus quadratum excessus quadrantis quadrato-quadrati hypotenusæ supra quadrato-quadratum medii proportionalis inter basem & Cathetum, addatur; aggregatum erit basis quadratum

dratum: sin auferatur, reliquum erit quadratū Catheti.

Geometricè sic. Diametro BC, & centro E medio, describatur semicirculus: Tum fiat BC.CM::CM.CD =AF perpendic: intra semicirculum. Est igitur BC $\times$AF=CMq. compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}$ BCq(AEq) - AFq=EFq.



Quare $\frac{1}{2}$ BC$\pm$ (EF) $\surd$q: $\frac{1}{4}$ BCq - AFq: $= \left\{ \begin{array}{l} \text{BF.} \\ \text{CF.} \end{array} \right.$

Ducantur omnia in BC: fietque

$\frac{1}{2}$BCq$\pm\surd$q: $\frac{1}{4}$BCqq - (BCq$\times$AFq)CMqq: =

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{BC}\times\text{BF} = \text{BAq.} \\ \text{BC}\times\text{CF} = \text{CAq.} \end{array} \right.$

Probl: XXV. Datis trianguli rectanguli base BA, & AM mediâ proportionali inter hypotenusam & Cathetum, invenire triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam Cathetus est CA, hypotenusa erit $\surd$q: BAq+ CAq : Et media inter ipsas proportionalis $\surd$qq: CAqq+BAq$\times$CAq.

Item quoniam hypotenusa est BC, cathetus erit $\surd$q BCq - BAq: Et media inter ipsas proportionalis $\surd$qq: BCqq - BAq$\times$BCq.

Quare CAqq+BAq$\times$CAq=AMqq. Et

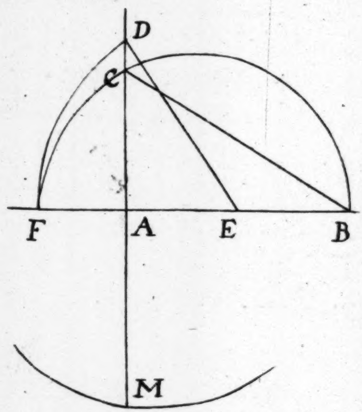
BCqq - BAq$\times$CAq=AMqq. Ergò per 9c16

$\surd$q:

$$\sqrt{q}:\tfrac{1}{4}\,BAqq+AMqq:\mp\tfrac{1}{2}BAq=\begin{cases}CAq.\\ BCq.\end{cases}$$

Quod Theorema verbis enuntiatur sic. Si lateri quadrato summæ ex quadrante quadrato-quadrati basis, & quadrato-quadrati mediæ proportionalis inter hypotenusam & Cathetum, dimidiatum basis quadratum auferatur, reliquum erit Catheti quadratum : sin addatur, aggregatum erit quadratum hypotenusæ.

Geometricè sic. Fiat BA. AM :: AM.AD perpendic: est igitur BA×AD =MAq. ex medio basis puncto E ad perpendicularem AD, ducatur ED=EF Et diametro BF describatur semicirculus secans AD in C. Tum ducta BC compleatur triangulum BAC. Nam $\tfrac{1}{4}$ BAq+ADq=EFq.



$$\text{Quare } \sqrt{q}:\tfrac{1}{4}BAq+ADq:\mp\tfrac{1}{2}BA=\begin{cases}AF.\\ BF.\end{cases}$$

Ducantur omnia in BA: fietque

$$\sqrt{q}:\tfrac{1}{4}BAqq+(BAq\times ADq)Mqq:\mp\tfrac{1}{2}BAq=$$

$$=\begin{cases}BA\times AF=CAq.\\ BA\times BF=BCq.\end{cases}$$

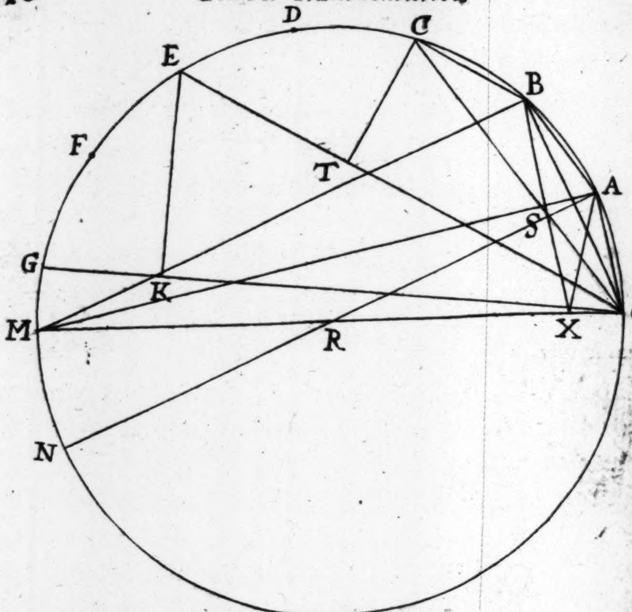
Con-

Consectarium. Atque ex his duabus proportionibus patet æquationum, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ adscendentes, quarum suprema sit quadrato-quadratica, effectio Geometrica.

Probl: XXVI. De angulorum sive peripheriarum bisectione, trisectione, quinquisectione, septisectione, pauca etiam, ad Analytices præstantiam, usumque admirandum, ostendendum, apponam, Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent: sicut nec Mesolabium inventum est. At verò in Sectione 15 Cap.XVIII, Æquationes quasdam Cubicas prælibavi; qua etiam solertia, aliàs innumeras Analytices studiosus poterit comminisci, quarum fortasse ope mesolabium hactenus tenebris obvolutum, in lucem tandem proferatur.

Distinguantur in peripheria septem æquales partes ab O fine diametri literis A B C D E F G: ducantur subtensæ, sicut fit in schemate. Sumatur MX = MB. ducantur etiam AX & XB; & diameter NRA; & ad OE perpendicularis CT. Quoniam per 17, Cap:XVIII, Theor:1, AB = AX: erunt triangula BMX, ORA, OAX, similia; ideoque $\frac{OAq}{Rad} = OX$. Sunt etiam triangula OAB, ARM, similia. Et per 47 e 1, MA $= \sqrt{q}:4Radq - OAq$.

His



His ſic præmiſſis, erit RA. MA, hoc eſt, Rad. $\sqrt{q}$: 4 Rad q — OA q :: OA. OB. Ergo

$$\frac{4Radq \times OAq - OAqq}{Radq} = OBq$$

: quæ eſt anguli duplicatio.

Et $4Radq \times OAq - OAqq = Radq \times OBq$: quæ eſt anguli biſectio.

Deinde quia OS = OA. & SA = OX. & NS = MX = MB. Erit per 17 c 18 Th: 16, $\frac{NS \times SA}{OS} = SC$: hoc eſt 2Rad $- \frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$, diviſa per OA, vel

2Radq

$\frac{2Radq \times OA - AOc}{Radq} = SC$. Et si addatur OA, fiet

$\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC$: quæ est anguli triplicatio. Et $3Radq \times OA - OAc = Radq \times OC$: quæ est anguli trisectio.

Item quia $2ET + CB = OE$ Et MO.MB::OC.OT: hoc est $2Rad. 2Rad. - \frac{OAq}{Rad} :: \frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq}$

$\frac{6Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Radqq}$: E cujus duplo si tollatur OA: restabit

$\frac{5Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE$: quæ est anguli quintuplatio. Et $OAqc - 5Radq \times OAc + 5Radqq \times OA = Radqq \times OE$: quæ est anguli quinquisectio.

Atque hac forma progredi licet ad Sept. sectionem inveniendam, Nempe $7Rcc \times OA - 14Rqq \times OAc + 7Rq \times OAqc + OAqqc = Rcc \times OG$.

Nam MO. MB :: OE. OK. Et $2OK - OC = OG$. Operationem studiosis relinquo.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in Multiplicatione & Divisione, nihil mutat: idcircò in hisce omnibus Æquationibus, Radius cum omnibus suis potestatibus, omitti poterit.

Sed quo artificio istiusmodi operosæ Æquationes (in quibus non sunt tantùm tres species æqualiter in ordine

ordine ſcalæ adſcendentes) ſolvantur, quanquàm non eſt hujus inſtituti docere: tamen quid in hoc negotio in uſum nobiliſſimi doctiſſimique Domini Gerardi Aungier, Domini Aungier & Baronis de Longford, ante plurimos annos, commentus ſum, in gratiam ſtudioſorum Mathematices, qua poſſum brevitate, in lucem proferre non pigebit.

SOLI DEO GLORIA.

DE ÆQVATIONVM ADFECTARUM RESOLUTIONE IN NUMERIS.

1. Construendæ Æquationis adfectæ modus. Sumatur, ut lubet, pro B, 3 : pro Cq, 16 : pro Dc, 125 : pro Fqq, 1296 : &c. Nec refert utrum numeri sumpti sint verè figurati necne. Sitque ex his Coëfficientibus construenda Æquatio Quadrato-cubica. Ea pro modo Tabulæ Analyticæ posterioris in ordine Quadrato-cubico, conflata, esto Lqc − 5BLqq + 10CqLc − 10DcLq + 5FqqL = Gqc. Quæ in numeris, statuendo L. (radicem) 47, erit 1qc − 15qq + 160c − 1250q + 6480l = 170304782. vel omissa *unciarum* distinctione, pro 15qq, dic BLqq, pro 160c, dic CqLc; pro 1250q, dic DcLq; & pro 6480l, dic FqqL. Nam si L sit 47 ; erit Lq = 2209 : & Lc = 103823 : & Lqq = 4879681 : & Lqc = 229345007.

Constructionis hujus Practica.

BLqq	229345007
15 × 4879681	-73195215
CqLc	156149792
160 × 103823	+16611680
DcLq	172761472
1250 × 2209	—2761250
FqqL	170000222
6480 × 47	+ 304560
	170304782

2. Proponatur Æquatio quæcunque, puta modò inventam,

1qc−15qq+160c−1250q+6480l = 170304782:
Vel numeris in symbola mutatis,
Lqc−BLqq+CqLc−DcLq+FqqL = Gqc:
Et si plures essent adfectionum Species, consequenter efferri poterunt per Hcc, Kqqc, Mqcc, Nccc, & sic ulterius.

3. Radicis L ex his investigandæ duæ erunt partes, nempe A latus primum, & E latus secundum, sive subsequens quodlibet. Quare L = A+E: & omnes potestates ex L, æquantur consimilibus potestatibus ex A+E: v.g. Lq = Aq+2AE+Eq: & Lc = Ac+3AqE+3AEq+Ec. &c.

Qui igitur numerosam hanc potestatum adfecta-
rum

rum resolutionem cupit addiscere, eum in purarum potestatum Genesi & Analysi, bene versatum esse oportet.

4. In Æquatione propositâ, potestas resolvenda 170304782, sive Gqc, est Quadrato-cubica, cujus etiam generis sunt singulæ adfectionum Species. Nam *Heterogenea inter se nec addi possunt, nec subtrahi.*

5. Quare in singulis adfectionibus duo sunt consideranda, Gradus adfectionis, & Coëfficiens: ut in 15qq, adfectionis gradus est Quadrato-quadraticus, & coefficiens 15, lateralis: In 160c, adfectionis Gradus est cubicus, & Coefficiens 160, Quadraticus: In 1250q, adfectionis Gradus est Quadraticus, & coefficiens 1250, cubicus: denique in 6480 l, adfectionis gradus est lateralis, & coefficiens 6480, Quadrato-quadraticus: sicut ex utraque Æquationis designatione comparata clarissimè liquebit. Atque hinc duo oriuntur Consectaria pro laterum singularium extractione.

6. Primum Consectarium est, Si coefficientis pro sua specie, radix, ducta in adfectionis gradum, multiplicet ipsum coefficientem: factus erit ejusdem generis cum potestate resolvenda: Ut in præcedente Æquatione, si latus 15 Quadrato-quadraticè multiplicatum, ducatur in 15; & si √q 160 cubatum, ducatur in Quadratum 160; & si √c 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique si √qq 6480 ducatur in Quadrato-quadratum 6480; ex singulis hisce multiplicationibus emerget numerus Quadrato-cubicus. *Atque hæc multiplicatio Analytica, modus*

eſt reducendi coefficientem quemlibet ad ſpeciem poteſtatis reſolvendæ, in lateris primi ſingularis extractione uſitatiſſimus.

7. Unde etiam clariſſimè liquet, quod ſi numerus ex coefficientibus hoc modo reductis, atque comparatis, emergens, minor ſit poteſtate reſolvenda, latus ipſius etiam minus eſt latere poteſtatis reſolvendæ; Si verò major, eſt majus; & ſi æqualis, æquale. In hac igitur Æquatione, 1qc−15qq+160c−1250q+6480l = 170304782: vel 170304782+15qq−160c+1250q −6480l = 1qc, ſi tum coefficiens lateralis 15, tum √q160, tum √c125, tum √qq6480, Quadratocubentur; prodibunt quatuor adfectionum ſpecies homogeneæ, nempe 7593..,3238..,1450.., 0581.., Quod quidem per Logarithmos facillime fit, ſatiſque pro propoſito acuratè. Operationis ratio ex fine hujus Tractatus (ubi de Logarithmorum notitiâ pauca traduntur) petenda, ſic eſt.

Log-

Logarithmi.	Numeri Coefficientes.
5 × 1,17609	15qq
5,88045	7593..
2) 2,20412	160c
5 × 1,10206	
5,51030	3238..
3) 3,09691	1250q
5 × 1,03230	
5,16150	1450..
4) 3,81157	64801
5 × 0,95289	
4,76445	0581..

In Æ,quatione igitur propositâ, speciebus pro signorum ratione in unam summam aggregatis, erit 1703047 00+759300−323800+145000−058100 =1qc=170827100. Quod etiam in aliis æquationibus similiter fieri poterit.

8. Secundum est, Si potestas resolvenda per Coefficientem dividatur, quotus ad ipsum adfectionis gradum referretur: hoc est, quotus erit latus, si adfectio sit sub latere; vel quadratum, si sub quadrato; & sic de reliquis gradibus: Ut in priore Æquatione,

ſi 170304782 dividatur per 15, quotus erit Quadrato-quadraticus; ſi per 160, quotus erit cubicus; ſi per 1250, quotus erit Quadraticus; ſi denique per 6480, quotus erit lateralis. Quare non ſemper ipſe quotus, ſed ipſius plerumque radix pro adfectionis gradu, erit latus ſingulare eliciendum.

9. In ſecundæ etiam radicis inveſtigatione hoc teneri debet; quòd pro numero figurarum in quoto cenſendus fere erit ejus gradus: ut ſi quotus unicâ conſtet figura, ſit latus; Si duabus, Quadratum; ſi tribus, cubus, &c. Et ſi quotus ſuperet 5, vel 50, vel 500, &c. ad gradum fortaſſe ſequentem, in grandioribus præſertim adfectionibus, poterit extendi. Atque *hæ ſunt diviſionis Analytica leges.*

10. Nec in iſtiuſmodi *Multiplicatione* atque *Diviſione*, totam poteſtatem reſolvendam, cum toto Coefficiente, percurrere opus erit; Sed ſolummodo ad punctum congruens proximum.

11. Nam in reſolutione adfectarum Æquationum punctationes omnes graduum fieri debent, in poteſtate reſolvendâ, ſicut in puris: Supremi quidem gradus ſupra: reliquorum verò infra. Coefficientes etiam, pro ſuâ quiſque ſpecie, punctandi ſunt. Prioris exempli punctationes ſic erunt,

$$1qc - 15qq + 160c - 125cq + 06480l = 170304782$$

12. Debet autem regulariter (præſertim ſi Coefficiens

ciens sit negativus) numerus punctorum in singulis esse æqualis. Quare si potestas resolvenda puncta plura, sive pauciora habeat supra se, quam Coefficiens; tot deficienti præponantur circuli, ut puncta utrobique possint esse æqualia. Et in singulis lateribus eruendis punctum coefficientis lateri illi proprium, ad parile potestatis resolvendæ punctum superius, accommodandum est: quod quidem fiet, si unitatis locus in coefficiente, ad puncta potestatis inferiora gradui suo convenientia, ordine dimoveantur.

13. Si Coefficiens aliquis sit fractio, sive latus surdum; reducatur ad integros cum partibus decimalibus.

14. Et si opus sit radicis eductionem in partibus decimalibus persequi: post lineam separatricem circulos quot visum erit adscribes, eosque supra & subtus, punctis consimiliter insignire perges.

15. Tabula ostendens tum *Divisores*, tum *Gnomones*, pro laterum singularium in Æquationibus adfectis investigatione; collecta & continuanda ex tabella Analytica posteriore. Et nota, quod Coefficientis cujusque species omnes sunt adfirmatæ, si ipsa sit adfirmata; negatæ vero, si negata.

Pro primo Latere.	Pro lateribus singularibus sequentibus, ad complendum *Gnomonem*.					
Aq	2AE .	Eq				= Cq
BA	BE .					
Ac	3AqE .	3AEq .	Ec			= Dc
BAq	B2AE .	BEq .				
CqA	CqE .					
Aqq	4AcE.	6AqEq.	4AEc .	Eqq		= Fqq
BAc	B3AqE.	B3AEq.	BEc .			
CqAq	Cq2AE .	CqEq.				
DcA	DcE .					
Aqc	5AqqE .	10AcEq.	10AqEc.	5AEqq .	Eqc	= Gqc
BAq	B4AcE .	B6AqEq.	B4AEc.	BEqq .		
CqAc	Cq3AqE.	Cq3AE .	CqEc.			
DcAq	Dc2AE .	DcEq.				
FqqA	FqqE .				&c.	

16. *Divisores* ubique sumuntur ex iis, quæ in data habentur mensura, justo ordine dispositis, atque Aggregatis, habita signorum ratione.

17. Si Æquationis alicujus suprema potestas sit negativa, Æquatio illa est ambigua.

18. Latus singulare primum elicitur ex his *Regulis*, desumptis ex duobus consectariis in Sect. 6. & 8.

Prima. Si Coefficiens ita longè in posteriora decedit, ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat; nec (Analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omninò poterit.

Secunda. Si Coefficiens in anteriora prorumpit, sitque adfirmativus: devolvendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat. Per quam divisionem quotus inventus ad gradum adfectionis referretur. Quod etiam in extractione minoris radicis Æquationis ambiguæ intelligi debet.

Tertia. Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis, quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa coefficientis, pro suo genere, radix.

Quarta. Si utrobique puncta sint æqualia, & numeri in primo tum coefficientis, tum potestatis resolvendæ, puncto, non multum discrepent: Coefficiens per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per Analyticam multiplicationem) reductus, potestati resol-

resolvendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si adfirmativus. Nam si sit Ac+CqA=Dc, erit Ac =Dc∓CqA. At si Æquationis ambiguæ latus majus quæratur, Potestas resolvenda è coefficiente reducto auferatur. Nam si sit CqA-Ac=Dc, erit Ac=CqA -Dc. Tum summæ vel differentiæ radix, erit latus primum eliciendum. Et nota, quod Æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per divisionem; aliquando per extractionem radicis è coefficiente; sed plerumquè per reductionem coefficientis investigatur.

19. Atque his præceptis solerter perpensis, Illud demùm verum latus singulare primum erit, quod primò omnium talem exhibet diagonalem, qui unà cum coefficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabellam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam (diligente ubique tum signorum, tum sedium respectu habito) aggregatis; numerum profert potestate resolvendâ, unde subtrahendus est, non majorem. Notandum autem est, quòd numerus negativus quantuscunque, minor est omni tum adfirmativo, tum negativo minore: ut -4 minor est quam 1, & quam -1. Item quòd subductio mutat signum numeri subducendi: ut ex 4 tolle 6, restat 4-6, hoc est -2. Et ex -4 tolle -6, restat -4+6, hoc est 2. Denique ex 4 tolle -6, restat 4+6, hoc est 10. Quare in lateris primi singularis extractione, tentandum aliquoties est, donec latus verum inveneris; quod per proximè majus, certissimè agnosces.

20. In

20. In constitutione divisoris pro secundo latere investigando; Coefficientis ductæ in gradum quemlibet, sedes ordinari debet secundum proprii gradus punctationem: hoc est, Coefficientis sub latere sedes distabit versus sinistram, à puncto sive sede ipsius Coefficientis, uno loco: Coefficientis sub quadrato sedes, duobus locis: sub cubo, tribus: &c. Et ob vitandam confusionem, utile erit in residuo potestatis resolvendæ, punctationes illas, quæ præsenti radici eruendæ inserviunt, solas distinguere.

21. Tum latus singulare secundum elicietur sic: Divisores cujusque generis, ex tabula præcedente inventi, & justo ordine dispositi, in unam summam aggregentur; & per totalem illum divisorem, reliquum potestatis resolvendæ dividatur. Nam quotus juxta divisionis Analyticæ leges (si id usus exigat) perpensus, dabit latus singulare secundum eliciendum. Cæterùm in hac investigatione multotiès, præsertim si magnitudinum dividentium negativarum aggregatum, aggregato adfirmativarum penè æquetur (adeò ut Divisor Reliquo potestatis resolvendæ minor admodum sit) maxima inest lubricitas: quam tamen Analysta sagax facile effugiet.

22. Hæc igitur Regula esto perpetua. Illud demùm verum latus singulare secundum est; quod primò omnium talem exhibet *Gnomonem*, constantem ex complementis cujusque generis, & Coefficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabulam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam,

ſummam, diligente ubique tum ſignorum, tum ſedium, habita ratione, aggregatis; qui *Gnomon* non major ſit poteſtate reſolvenda unde ſubtrahendus eſt. Quare tentandum aliquoties eſt, donec latus verum inveneris: quod etiam per proximè majus, certiſſime agnoſces.

23. Latera omnia ſingularia poſt ſecundum, per Diviſionem ſimplicem facillimè acquiruntur.

24. Si adfectiones ſint compoſitæ ex adfirmativis, & negativis: antecedentia præcepta mixtim ſunt cum ſolertia & judicio uſurpanda. Et in lateribus æſtimandis præponderabit ſemper adfectio major, minori. Verum totum hoc negotium Analyticum, quod verbis enarrare difficillimum foret, frequens exercitatio, tum in Geneſi, tum in Analyſi poteſtatum cujuſque generis, facile ſatis reddet, atque familiare.

25. Sed quia ſuperius aliquoties dictum eſt, tentatu opus eſſe; quod quidem in adfectionibus multiplicibus, & ubi gradus ſunt elatiores, valde laborioſum erit: adponam hic, coronidis loco, duos modos ejuſmodi tentamenti levandi: unum per Depreſſionem, ex Cap. XVI. Sect 7. *Clavis*: alterum per Canonem Logarithmorum 10000. In utroque autem ſi Æquatio fuerit ambigua, ſigna ejus omnia erunt mutanda. Notandum etiam hîc eſt, quod numerus negativus quantuſcunque, minor eſt omni tum adfirmativo, tum negativo minore.

26. Inventio laterum ſingularium per Depreſſionem. Si latus primum quæratur: In ſingulis Æquationis

tionis datæ ſpeciebus abſcindantur lineâ ſeparatrice omnia puncta poſt primum. Deinde adplicentur omnes ſpecies ad latus; hoc eſt, deprimantur uno gradu.

Exampl:I. 1qq−72c+2386001 = 8725815. Hæc Deprimendo fiet 1c + 238,6 − 7,2q = L) 872,5.

Eſto A 4. erit 4) 872,5 (218,1, juſtus.

Et + 64 + 238,6 − 115,2 = 187,4, minor juſto.

Eſto A 5 erit 5) 872,5 (174,5, juſtus.

Et + 125 + 238,6 − 180,0 = 183,6; major juſto.

Latus igitur verum A = 5 − 1, hoc eſt, 4.

Exampl:II. De Æquatione ambigua. 1c − 3257l = −45744. Hæc deprimendo fiet 1q − 32,5 = L) − 45,7.

Eſto A 4. Erit 4) − 45,7 (− 11,4, juſtus.

Et + 16 − 32,5 = − 16,5, minor juſto.

Eſto A 5. erit 5) − 45,7 (− 9,1, juſtus.

Et + 25 − 32,5 = − 7,5, major juſto.

Latus igitur verum A = 5 − 1, hoc eſt, 4.

Si latus ſecundum quæratur: In ſingulis ſpeciebus abſcindantur omnia puncta poſt ſecundum. Deinde adplicentur omnes ſpecies ad quadratum; hoc eſt, deprimantur duobus gradibus. Ut in Exemplo I,

199

$1qq - 72c + 238600l = 8725815$. Hæc Deprimendo fiet $1q + L)\ 238600 - 72l = Q)$ 8725815.

Esto A 47: erit 2209) 8725815 (3949. Justus.
Et $2209+5077-3384=3896$. minor justo.
Esto A 48: erit 2304) 8725815 (3787. Justus.
Et $2304+4971-3456=3819$: major justo.
Latus igitur verum est $48-1$, hoc est, 47.

27. Inventio lateris singularis secundi per *Logarithmos.*

Index Logarithmi cujusque desumitur ex tabella in initio *Clav:* pro distantia primæ suæ figuræ, ante vel post locum unitatum, cujus Index est 0. Eædem igitur figuræ, eodem ordine dispositæ, eundem habeat Logarithmum: Indices vero diversi esse possunt. Ut numeri 436, Log: est 2,6394865 at numeri 43600, est 4,6394865. & numeri 4,36, Log: est 0,6394865. Denique numeri 0,00436, Log: est $\bar{3}$,6394865.

Summæ duorum Logarithmorum, Logarithmus est facti à valoribus: differentiæ autem, Logarithmus est quoti. Ut quia $4,36 \times 9 = 39,24$ hujus Log: $1,5937290 = 0,6394865 + 0,9542425$. Et quia 9) 39,24 (4,36: hujus Log: $0,6394865 = 1,5937290 - 0,9542425$.

Logarithmus lateris, ductus in numerum dimensionum cujusque potestatis, est ejusdem potestatis Logarithmus:

rithmus : Ut quia numeri 436, Log : est 2,6394865 : Erit 2,6394865×2 = Log: Q:436. Et 2,6394865×3 = C: 436: Et 2,6394865×4 = QQ:436. &c.

Logarithmus potestatis cujusque divisus per numerum dimensionum suarum, exhibet Logarithmum radicis suæ.

Si in Serie Geometricè continuè proportionalium Logarithmus primi termini tollatur è Logarithmo secundi, reliquus erit Logarithmus rationis : Qui, si in numerum terminorum minus uno (qui numerus est rationum) ducatur ; deindeque Logarithmo primi termini augeatur; Logarithmus erit termini ultimi.

28. Atque hæc de Logarithmorum notitia satis sunto : quibus intellectis, reliquam operationem, exempla sequentia diligenter inspecta, facilem reddent: In qua etiam omnes punctationes, post duas primas, linea separatrice abscindendæ sunt.

Exampl:I. 1qq−72c+238600l = 8725815. Justus. Sunto duo prima latera singularia.

			−72	+238600
47.	1,67209	8	1,85733	5,37767
Cu:	5,01629		5,01629	1,67210
QQ:	6,68839		6,87362	7,04977
	+4880−		−7475	+11213

Et +4880+11213−7475 = +8618: minor justo.

48.	1,68124	1	1,85733	5,37767
Cu.	5,04372		5,04372	1,68124
QQ.	6,72496		6,90105	7,05891
	+5308		—7963	+ 11455

Et +5308+11455-7963 = +8800 : major justo. Radix igitur vera erit 48-1, hoc est, 47.

Eampl:II. 1c—32571 = —45744. Justus.

Sunto duo prima latera singularia.

			1 —32571
48.	1,68124	1	3,51282
Cu.	5,04372		1,68124
	+1106		5,19406
			-1563

+1106—1563 = —457, minor justus.

49.	1,69019	6	3,51282
Cu.	5,07059		1,69020
	+1176		5,20302
			—1596

+1176—1596 = —420, major justo.

Radix igitur vera erit 49—1, hoc est, 48.

Latus secundum investigari poterit per Logarithmos, etiam Depressione præcedente. Ut in Exemplo V. 1qq —1246|00q = 08972|6256. Hæc quadraticè depressa fiet 1q —1246 = Q) 8972,6.

Supponantur duo prima latera singularia,

,8972,6,

34. 1,53148 | 3,95337

Q. 3,06296 | 3,06296

+ 1156 | 0,89041: valor 7,77 Justus.

+ 1156—1246 = -90: minor justo.

36. 1,55630 3,95337

3,11260 3,11260

+ 1296 | 0,84077: valor 6,93 Justus.

+ 1296—1246 = +50: major justo.

Radix igitur vera cadit inter 34 & 36.

Atque hoc modò in XXVIII Sectionibus, sive Præceptis (qui numerus est perfectus) doctrinam de Æquationum adfectarum resolutione in numeris, adjuvante Deo omnium bonorum Datore, expedivi: Ejus igitur sit omnis laus, honor, & gloria in sempiternum. Amen.

Exempla quædam Æquationum Resolutarum in Numeris.

Æquationum Quadraticarum, omniumque in quibus sunt tres species in ordine scalæ æqualiter adscendentes, Analysi supersedebo : quia in Cap: XVI. Sect 9. *Clavis*, modus facilior traditus est, quàm per generalem hanc methodum præstari poterit : Et ad Exempla Æquationum aliter adfectarum progrediar. Denique in fine, Notas ad Exempla, subjungam ; in quibus operationis ratio , in laterum singularium investigatione , ex præceptis superiùs traditis , aperietur.

Initium faciam à Resolutione numerosæ Æquationis primò constitutæ, Nempe

1qc−15qq+160c−1250q+6480l = 170304782

Hoc est, Lqc−BLqq+CqLc−DcLq+FqqL = Gqc

Examplum

Exemplum I.

1qc - 15qq + 160c — 1250q + 06480l = 170304782.
Hoc est, Lqc - BLqq + CqLc - DcLq + FqqL = Gqc.

17030|4782	(47
1|5	— B
1|250	— Dc
1|60	Cq
|6480	Fqq
1024|	Aqc
102|40	CqAc
2|5920	FqqA
+ 1128|9920	
384|0	— BAqq
200|00	— DcAq
− 404|000	
7249|920	*Ablatit.*
R 978|05582	
1280	5Aqq
640	10 Ac
160	10 Aq
20	5 A
7680	Cq3Aq
1920	Cq3A
160	Cq
6480	Fqq

+1

+142	50040	
38	40	−B4Ac
1	440	−B6Aq
	240	−B4A
	15	−B
1	0000	−Dc2A
	1250	−Dc
−40	87665	
+101	62375	*Divisor.*
8960	0	5AqqE
313	60	10AcEq
54	880	10AqEc
4	8020	5AEqq
	16807	Eqc
53	760	Cq3AqE
9	4080	Cq3AEq
	54880	CqEc
	45360	FqqE
+1333	62047	
268	80	−B4AcE
70	560	−B6AqEq
8	2320	−B4AEc
	36015	−BEqq
7	0000	−Dc2AE
	61250	−DcEq
−355	56465	
+978	05582	*Ablatit.*

$1c + 420000\,l = 2476517\dot{1}3$

Hoc est, $Lc + CqL = Dc$.

	247 | 651 | 713	(417
	42 | 0000	Cq
	64	Ac
	168 | 0000	CqA
	232 | 0000	*Ablatit.*
Rc	15 | 651 | 713	
	48	3Aq
	12	3A
	42 | 000 | 00	Cq
	9 | 120 | 00	*Divisor.*
	48	3AqE
	12	3AEq
	1	Ec
	42 | 000 | 00	CqE
	9 | 121 | 00	*Ablatit.*
Rc	6 | 530 | 713	
	504 | 3	3Aq
	1 | 23	3A
	420 | 000	Cq
	925 | 530	*Divisor.*
	3 | 530 | 1	3AqE
	60 | 27	3AEq
	343	Ec
	2 | 940 | 000	CqE
	6 | 530 | 713	*Ablatit.*

4		1
16	8	
		1
16	8	1

Exemplum III.

$1c + 1007q = 247617936,$

Hoc est, $Lc + BLq = Dc$.

247	617	936	(417
10	07		B
64			Ac
161	12		BAq
225	12		*Ablatit.*
℞ 22	497	936	
4	8		3Aq
	12		3A
8	056		B2A
	100	7	B
13	076	7	*Divisor.*
4	8		3AqE
	12		3AEq
	1		Ec
8	056		B2AE
	100	7	BEq
13	077	7	*Ablatit.*

℞	9	4 2 0	2 3 6	
		5 0 4	3	3Aq
		1	2 3	3A
		8 2 5	7 4	2BA
		1	0 0 7	B
	1	3 3 2	2 7 7	*Divisor.*
	3	5 3 0	1	3AqE
		6 0	2 7	3AEq
			3 4 3	Ec
	5	7 8 0	1 8	B2AE
		4 9	3 4 3	BEq
	9	4 2 0	2 3 6	*Ablatit.*

4	1
16	
	8
	1
16	81

1qq -- 442990051 = 22252086

Lqq — DcL = Fqq.

0	2 2 2 5	2 0 8 6	(345
-- 4 4	2 9 9 0	0 5	— Dc
+ 8 1			Aqq
-- 1 3 2	8 9 7 0	1 5	— DcA
— 5 1	8 9 7 0	1 5	*Ablatit*
℞ 5 2	1 1 9 5	3 5 8 6	
1 0	8		4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
+ 1 1	3 5 2		
-- 4	4 2 9 9	0 0 5	-- Dc
+ 6	9 2 2 0	9 9 5	*Divisor.*
5 4	0		4AcE
1 3	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AE
	6 2 5		Eqq
+ 6 9	0 6 2 5		
-- 2 2	1 4 9 5	0 2 5	— DcE
+ 4 6	9 1 2 9	9 7 5	*Ablatit.*
℞ 5	2 0 6 5	3 8 3 6	
+ 1	2 7 9 3	7 3 9 5	*Divisor*
+ 5	2 0 6 5	3 8 3 6	*Ablatit.*

Exem. V.

1qq-124600q=0897262 56, Lqq-CqLq=Fqq.

08972 6256	(354
-124600	-Cq
+81	Aqq
-1121400	-CqAq
-311400	*Ablatit*
R 32 0372 6256	
108	4Ac
54	6Aq
12	4A
+11352	
747600	-Cq2A
124600	-Cq
-7600600	
+3751400	*Divisor*
540	4AcE
1350	6AqEq
1500	4AEc
625	Eqq
+690625	
3738000	-Cq2AE
3150000	-CqEq
-40495000	
+28567500	*Ablatit*
R 3 4697 6256	
8489 1800	*Divisor*
† 3 4697 6256	*Ablatit*

Exemplum VI.

$1qq - 340c = 621066096$

$Lqq - BLc = Fqq.$

6	2 1 0 6	6 0 9 6	(354
− 3	4 0		− B
+ 8 1			Aqq
− − 9 1	8 0		BAc
− 1 0	8 0		*Ablatit*
℞ 1 7	0 1 0 6	6 0 9 6	
1 0	8		4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
+ 1 1	3 5 2		
9	1 8 0		− B3Aq
	3 0 6 0		− B3A
	3 4	0	− B
− − 9	4 8 9 4	0	
+ 1	8 6 2 6	0	*Divisor*
5 4	0		4AcE
1 3	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AEc
	6 2 5		Eqq

+6906	25		
45900			-B3AqE
76500			-B3AEq
	42500		-BEc
−53	97500		
+15	08750		*Ablatit*
R 1	92316096		
+	46929060		*Divisor*
+1	92316096		*Ablatit*

Exem. VII.

Exemplum VII.

1qq — 77108000l = 085530576 Lqq-DcL = Fqq

085530576	(426	
−77108000	—Dc	
+256	Aqq	
−308432000	—DcA	
−52432000	*Ablatit*	
R 532873 0576		4 . 2
256	4Ac	16
96	6Aq	16
16	4A	4
+26576		1764
—77108000	—Dc	
+188652000	*Divisor*	
512	4AcE	4 . . 2
384	6AqEq	1
128	4AEc	646 8
16	Eqq	948
+551696		74088
—154216000	—DcE	
+397480000	*Ablatit*	
R 1353930576		
+2203040 80	*Divisor*	
+1353930576	*Ablatit.*	

Exemplum VIII.

32001 — 1c = 46577 Æquatio est
CqL — Lc = Dc ambigua.

(47 *Radix major.*

46577	
3200	Cq
-64	-Ac
+12800	CqA
+6400	A*blatit.*
R-17423	
48	-3Aq
12	-3A
-492	
+3200	Cq
--1720	*Divisor.*
336	-3AqE
588	-3AEq
343	-Ec
-39823	
+22400	CqE
-17423	A*blatit.*
R00000	

Exem. IX.

$$32001 - 1c = 46577$$

(157 *Radix minor.*

4 6	5 7 7		
3 2	0 0		Cq
-- 1			Ac
+ 3 2	0 0		CqA
3 1	0 0		*Ablatit.*
R 1 5	5 7 7		
	3		2 Aq
	3		3 A
--	3 3		
+ 3	2 0 0		Cq
2	8 7 0		*Divisor.*
1	5		-3 AqE
	7 5		-3 AEq
	1 2 5		-Ec
-- 2	3 7 5		
+ 1 6	0 0 0		CqE
1 3	6 2 5		*Ablatit.*
R 1	9 5 2	0 0 0	
	2 5 2	0 5	*Divisor.*
	7 4 5	1 0 7	*Ablatit*
R 6	2 0 6	8 9 3	0 0 0 &c.

$53q - 1c = 13254$ Æquatio est
$BLq - Lc = Dc$ ambigua.

13	2 5 4	(49	*Radix major.*
5	3	B	
−64		-Ac	
+84	8	BAq	
+20	8	*Ablatit*	
℞ −−7	5 4 6		
4	8	-3Aq	
	1 2	-3A	
−−4	9 2		
4	2 4	B2A	
	5 3	B	
+4	2 9 3		
−−	6 2 7	*Divisor*	
33	6	-3AqE	
5	8 8	-3AEq	
	3 4 3	-Ec	
−−39	8 2 3		
29	6 8	B2AE	
2	5 9 5	BEq	
+32	2 7 7		
−−7	5 4 6	*Ablatit*	
℞ 0	0 0 0		

Exemplum XI.

$$53q - 1c = 13254$$

13254	(20,05 *Radix minor.*
53	B
−8	-Ac
212	BAq
132	*Ablatit*

Rc	54 000 000 0	
	-- 12 000 0	--3Aq
	-- 6 00	--3A
	-- 12 006 00	
	21 200	B2A
	5 3	B
+	21 205 3	
	9 199 30	*Divisor*
	-- 60 000 0	--3AqE
	-- 1 50 00	--3AEq
	-- 1 25	--Ec
	-- 60 150 125	
	106 000	B2AE
	1 325	BEq
+	106 1325	
	45 98 2375	*Ablatit*
Rc	90 17 625 000	&c

Exemplum

Exemplum XII.

600341 — 1c = 1023768

CqL — Lc = Dc.

1	0 2 3	7 6 8	(236	Radix major.
− 6	0 0 3	4	Cq	
− 8			−Ac	
+ 1 2	0 0 6	8	CqA	
+ 4	0 0 6	8	Ablatit.	
R − 2	9 8 3	0 3 2		
1	2		−3Aq	
	6		−3A	
− 1	2 6			
+	6 0 0	3 4	Cq	
—	6 5 9	6 6	Divisor.	
3	6		−3AqE	
	5 4		−3AEq	
	2 7		−Ec	
− 4	1 6 7			
+ 1	8 0 1	0 2	CqE	
− 2	3 6 5	9 8	Ablatit.	
R −	6 1 7	0 5 2		
	− 9 6	3 6 6	Divisor.	
	6 1 7	0 5 2	Ablatit.	

Exemplum XI.

$$539q - 1c = 13254$$

13254	(20,05	*Radix minor.*
53	B	
-8	-Ac	
212	BAq	
132	*Ablatit*	

Rc	54000000	
	--1200000	--3Aq
	--600	--3A
	--1200600	
	21200	B2A
	53	B
	+ 2120053	
	919930	*Divisor*
	--6000000	--3AqE
	--15000	--3AEq
	--125	--Ec
	--6015125	
	1060000	B2AE
	1325	BEq
+	1061325	
	4598237 5	*Ablatit*
Rc	9017625000 &c	

Exemplum

Exemplum XII.

600034l — 1c = 1023768

CqL — Lc = Dc.

1 0 2 3 7 6 8	(236	Radix major.
− 6 0 0 3 4	Cq	
— 8	−Ac	
+ 1 2 0 0 6 8	CqA	
+ 4 0 0 6 8	*Ablatit.*	
R −2 9 8 3 0 3 2		
1 2	−3Aq	
6	−3A	
− 1 2 6		
+ 6 0 0 3 4	Cq	
— 6 5 9 6 6	*Divisor.*	
3 6	−3AqE	
5 4	−3AEq	
2 7	−Ec	
− 4 1 6 7		
+ 1 8 0 1 0 2	CqE	
− 2 3 6 5 9 8	*Ablatit.*	
R — 6 1 7 0 5 2		
− 9 6 3 6 6	*Divisor.*	
6 1 7 0 5 2	*Ablatit.*	

Exemplum XIII.

$600341 - 1c = 1023768$

17,135 Radix minor.

	1	0 2 3	7 6 8	
—		6 0 0	3 4	Cq
—		6 -1		-Ac
+		0 0	3 4	CqA
+		5 9 9	3 4	*Ablatit*
R		4 2 4	4 2 8	
			3	-3Aq
			3	-3A
—		-3	3	
—		+ 6 0 0	3 4	Cq
		5 9 7	0 4	*Divisor*
		2 1		-3AqE
		1 4	7	-3AEq
			3 4 3	-Ec
		-3 9	1 3	
+		4 2 0	2 3 8	CqE
+		4 1 6	3 2 5	*Ablatit.*
R +	8	1 0 3	0 0 0	
	5	9 1 6	1 9	*Divisor.*
	6	0 1 6	1 8 9	*Ablatit.*

℞ 2	0 8 6	8 1 1	0 0 0	
	5 9 1	5 6 2	5 7	*Divisor*
1	7 7 5	5 5 6	9 0 3	*Ablatit*

℞	3 1 1	2 5 4	0 9 7	0 0 0	
	5 9	1 5 3	6 3 7	9 1	*Divisor.*
	2 9 5	7 6 7	1 6 1	6 2 5	*Ablatit*

℞ 1 5 | 4 8 6 | 9 3 6 | 3 7 5 | 0 0 0 | &c.

Exemplum XIV.

$1qq - 72c + 2386001 = 872581517056$

$Lqq - BLc + DcL = Fqq.$

8 7 2	5 8 1 5	7 0 5 6	(47,6
--7	2	--B	
+2 3 8	6 0 0	Dc	
2 5 6		Aqq	
9 5 4	4 0 0	DcA	
+1 2 1 0	4 0 0		
−4 0 6	8	BAc	
+7 4 9	6 0 0	*Ablatit.*	

L 2 ℞ 122

℞ 1 2 2	9 8 1 5	7 0 5 6	
2 5	6	4Ac	
	9 6	6Aq	
	1 6	4A	
2 3	8 6 0 0	Dc	
+ 5 0	4 3 6 0		
3 4	5 6	--B3Aq	
	8 6 4	--B3A	
	7 2	--B	
− 3 5	4 3 1 2		
+ 1 5	0 0 4 8	*Divisor.*	
1 7 9	2	4AcE	
4 7	0 4	6AqEq	
5	4 8 8	4AEc	
	2 4 0 1	Eqq	
1 6 7	0 2 0 0	DcE	
+ 3 9 8	9 8 8 1		
2 4 1	9 2	-B3AqE	
4 2	3 3 6	-B3AEq	
2	4 6 9 6	-BEc	
− 2 8 6	7 2 5 6		
1 1 2	2 6 2 5	*Ablatit.*	
℞ 1 0	7 1 9 0	7 0 5 6	
1	7 6 9 8	8 0 8	*Divisor.*
1 0	7 1 9 0	7 0 5 6	*Ablatit*

3l-1c = 1,25864078 2100 CqL-Lc = Dc

1 2 5 8 6 4 0 7 8 2 1 (0,4499

8 3 Cq — Subtensa

Gr: 26.

-6 4 -Ac

+1 2 CqA

1 1 3 6 Ablatit.

℞ 1 2 2 6 4 0

4 8 -3Aq

1 2 -3A

-4 9 2

+3 Cq

2 5 0 8 Divisor

1 9 2 -3Aq E

1 9 2 -3AEq

6 4 -Ec

-2 1 1 8 4

+ 1 2 CqE

9 8 8 1 6 Ablatit

℞ 2 3 8 2 4 7 8 2

2 4 1 7 8 8 Divisor.

2 1 6 6 5 1 5 1 Ablatit.

℞ 2 1 5 9 6 3 1 1 0 0

2 3 9 5 0 6 2 3 Divisor.

2 1 5 4 5 8 5 5 0 1 Ablatit.

℞ 0 5 0 4 5 5 9 9 0 0 0

1qc-5c+5l = 1,147152872702092

Lqc-CqLc+FqqL = Gqc.

(0,2437
Subtensa
Gr:14.

	1	14715	28727	02092
†		5	Fqq	
		-5	-Cq	
		32	Aqc	
	1	0	FqqA	
†	1	00032		
		—40	CqAc	
		96032	*Ablatit.*	
℞		18683	28727	
		8	0	5Aqq
			80	10Ac
			40	10Aq
			10	5A
		5		Fqq
		+50088	410	
		60		-Cq3Aq
		30		-Cq3A
			5	-Cq
		—6305		
		+43783	410	*Divisor.*
		32	0	5AqE
		4	80	10AEq
		2	560	10AqEc
			2560	5AEqq
			1024	Eqc
		20		FqqE
†		20039	62624	

	240		-Cq3Aq	E
	480		-Cq3AE	q
	320		CqEc	
	-29120			
	17127	62624	*Ablatit.*	
Rc	1555	66103	02092	
	414	9122		Divisor.
	1242	65012	09443	*Ablatit.*
Rc	313	01090	92649	00000

Notæ in Exempla præcedentia.

IN Exemplis Sectionum 26 & 28, Numerum Justum voco eum, qui oritur ex adplicatione potestatis Resolvendæ ad gradum lateris suppositi, per quem facta est Depressio. Hæc enim mensura est, cui reliquæ species omnes legitimè aggregatæ, deberent esse æquales. Ut in Exemplo 1° Sectionis 26, 1c + 238,6 — 7,2q = L) 872,5. Si pro latere primo supponatur 5: Oportet esse C:5: + 238,6 — 7,2 Q:5: = 872,5 divisum per 5: hoc est 125 + 238,6 — (7,2 × 25) 180, nempe 183,6 æqualem esse 174,5 Justo. At major est: ideoque latus verum minus est quàm 5. Supponatur igitur iterùm 4: Et periculum fac, an C:4: + 238,6 — 7,2Q:4: æquetur 872,5 diviso per 4.

Cæterùm nè in his Exemplis, sicut etiam in sequentibus, tentamenta hæc casu merè fortuito suscipiantur; Monendum erit.

Primò si lateris eruti homogenea potestas excedat potestatem Resolvendam: vel si magnitudines augentes potestatem Resolvendam, excedant eas quæ imminuunt: Latus A verum minus (ut plurimùm) erit latere eruto: Sin aliter, majus. Ut in hac Æquatione, 1c + 260000 l = 180931712.

Secundò, Si Divisores sub eodem signo cum Reliquo

quo poteſtatis Reſolvendæ, excedant eos, qui ſunt ſub ſigno diverſo: Latus E verum (ut plurimum) minus erit quam Quotus: ſin aliter, majus: Ut in hac Æquatione, 15681 -- 1c = 21952. Idem etiam accidit in Æquationibus ambiguis, quando Reliquum poteſtatis Reſolvendæ eſt adfirmativum: ut in hac Æquatione, 67681 — 1c = 214273. Harum trium Æquationum ſolutio in praxi, poſt Notas oſtendetur.

Tertio, ſi poſt hæc Monita, nihilominus ſubſit dubitatio; tentamentum à 5 commodiſſimè erit inchoandum: Atque inde per numeros impares continuanda inquiſitio: ſive ea per Depreſſionem fiat, ſive per Logarithmos.

His præmonitis, reſtat ut Exempla ipſa diſcutiamus.

Ad Exempl: I. √qc1703 eſt 4+, per Sect: 18, Reg: 1. Nam ut ex Sect: 7. adparet, per Coefficientes Analyticè reductos, non fit in primo puncto notabilis immutatio. Quare latus A verum erit 4.

Latus E verum mius eſt quàm Quotus 9: quia Diviſores ſub ſigno + (quod ſignum eſt ipſius R) excedunt eos qui ſunt ſub ſigno —.

Ad Exempl: II. 42) 247 (6—, per Sect: 18, Reg: 2. Nam 42 Analyticè reductus, per Sect: 6 & 8, fit 252: major quàm 247. Eſtque Latus A verum minus quàm 6; quia C:6—: excedit 247.6.

Ad Exempl: III. 10) 247 (24+Q:5—: per Sect: 18, Reg: 2.

Ad

Ad Exempl: IV. √c44|3 eſt 3 +, per Sect: 18, Reg:3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 8 —, per Monit:2.

Ad Exempl: V. √q12|4 eſt 3 +, per Sect: 18, Reg:3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 9 —, per Monit:2.

Ad Exempl: VI. Coefficiens lateralis 3|4 Quadrato-quadraticè multiplicatus, & auctus 6|2, fit 140, QQ:3 +: per Sect: 18, Reg: 4. Quare latus A verũ eſt 3.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9 —, per Monit:2.

Ad Exempl: VII. √c77 eſt 4, per Sect: 18, Reg:3. Quare latus A verum eſt 4.

Ad Exempl: VIII. √q32 eſt 5|65, in 32 fit 180|8 mi 46|5, reſtat 144, C:5: per Sect:18, Reg:4. At 144 excedit 46|5. Quare Latus A verum minus eſt quàm 5, per Monit:1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 10, per Monit: 2.

Ad Exempl: IX, XI, XIII. Solutio facillima eſt per Diviſionem, juxta Sect: 18, Reg:3.

Ad Exempl: X. C:5 : eſt 125, mi 13, reſtat 112, C:5 —: per Sect:18, Reg:4, At 112 excedit 13. Quare latus A verum minus eſt quam 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 12, per Monit: 2.

Ad

Ad Exempl:XII. √q6 est 2 +, in 6 fit 12, mi 1, restat 11, C:25 per Sect: 18, Reg:4. At 11 excedit 1. Quare latus A verum paulò minus quam 2 +, per Monit. 1.

Latus E verum minus est quàm Quotus 5 −, per Monit: 2.

Ad Exempl : XIV. QQ:7,2: est — 2687. Et √c238,6 est 6,2, cujus QQ est + 1480. Tum — 2687 + 1480 = — 1207 : Hic additus ad 872, dat 2079, QQ:6 + : per Sect:18, Reg:4. Et quia adjectitius — 2687 major est quam ablatitius + 1480, erit latus A verum minus quàm 6, per Monit: 1.

Latus E verum minus est quam Quotus 9, per Monit: 2.

Ad Exempl: XV, XVI, Quia in utroque Æquationis ambiguæ Radix minor quæritur, nec obstant Coefficientes etiam reducti, Analysis per Divis: fiet, juxta Sect: 18, Reg: 1.

Praxis Exempli in Monito primo.

1c + 26,0000 = 180931713.

180,9 (4, latus A

26,0 Cq.

√q26 est 5, in 26 fit 130, tollatur ex 180, restat 50, C:3+: qui minor est quam 180. Quare latus A verum majus est quàm 3.

Praxis

Praxis Exempli in Monito secundo.

$$15681 - 1c = 21952$$

21	95 2	(28, Duo prima latera.
15	68	Cq
−8		Ac
+31	63	CqA
+23	36	*Ablat*
℞ −1	40 8	
1	2	−3Aq
	6	−3A
−1	26	
+1	56 8	Cq
+	30 8	*Divisor*

Signum ℞ est −. At − 1,26 minor est quam + 1,568. Quare latus E verum majus est quam Quotus 4.

Praxis

Praxis Exempli posterioris in
Monito secundo.

67681 - 1c = 214273

21 4 2 7 3	(47,	Duo prima latera.
6 7 6 8	Cq	
-64	-Ac	
+ 2707 2	CqA	
+ 2067 2	*Ablat*	
R + 7 5 5 3		
4 8	-3Aq	
1 2	-3A	
-4 9 2		
+ 6 7 6 8	Cq	
+ 1 8 4 8	*Divisor.*	

Signum R est +. At Divisor ex A lateris gradibus negativus, minor est Divisore Coefficiente adfirmativo; hoc est --4,92 minor est quam +6,768. Quare latus E verum majus erit quam Quotus 4.

In Sectione XXVII. Logarithmorum doctrinam paucis tradidi: Sed satis luculentèr præsertim pro tribus prioribus Numerationis speciebus, scilicet Additione, Subductione, & Multiplicatione.

Operatio

Operatio quidem in Addendo & Subtrahendo, si Indices sint adfirmativi, à communi integrorum viâ nihil differt: parum etiam si sint negativi, ut ex his Exemplis apparet,

Inventio fractionum $\left\{\begin{array}{l} \underline{13}.\ 1,11394. \\ \underline{17}.\ 1,23045. \end{array}\right.$ Log: $\bar{1}$,88349

Et $\left\{\begin{array}{l} \underline{15}.\ 1,17609 \\ \underline{32}.\ 1,50515 \end{array}\right.$ Log: $\bar{1}$,67194

Additio.

Ad	$\bar{1}$, 88349
adde	$\bar{1}$, 67194
Sum	$\bar{1}$, 55543

Subductio.

Ex	$\bar{1}$, 88349
tolle	$\bar{1}$, 67194
Rest	0, 21155

Multiplicatio.

Lateris 0,0064
3 * $\bar{3}$, 80614
Cubus $\bar{7}$, 41842

Lateris 0,0064
2 * $\bar{3}$, 80614
Quadr: $\bar{5}$, 61228

Divisionis Logarithmi Indicem habentis negativum, per 2,3,4,5, &c. difficultas constat in investigatione Indicis Quoti. Cui rei hæc inservit Tabella.

Divisores

Divisores.

&c

2)				$\overline{1}$.	$\overline{2}$	$\overline{1}$
				$\overline{3}$.	$\overline{4}$	$\overline{2}$
				$\overline{5}$.	$\overline{6}$	$\overline{3}$
				$\overline{7}$.	$\overline{8}$	$\overline{4}$
3)			$\overline{1}$.	$\overline{2}$.	$\overline{3}$	$\overline{1}$
			$\overline{4}$.	$\overline{5}$.	$\overline{6}$	$\overline{2}$
			$\overline{7}$.	$\overline{8}$.	$\overline{9}$	$\overline{3}$
4)		$\overline{1}$.	$\overline{2}$.	$\overline{3}$.	$\overline{4}$	$\overline{1}$
		$\overline{5}$.	$\overline{6}$.	$\overline{7}$.	$\overline{8}$	$\overline{2}$
5)	$\overline{1}$.	$\overline{2}$.	$\overline{3}$.	$\overline{4}$.	$\overline{5}$	$\overline{1}$
	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$
	40	30	20	10	0	

In hac Tabella Divisores sunt à sinistrâ intra lineam flexam.

Tum verùs dextram sequuntur Logarithmorum dividendorum Indices negativi.

His in singulis ordinibus collaterales adstant Quotorum Indices etiam negativi.

Subtùs autem qui scribuntur numeri, 0, 10, 20, 30, 40, Ostendunt numeros addendos primæ figuræ Logarithmi dividendi, cujus Index negativus invenitur supra in eâdem columnâ, juxta Divisorem. Ut si Logarithmus

garithmus $\bar{7}$, 41842 postuletur dividi per 3: Quæratur $\bar{7}$ juxta 3) dabiturque collateralis $\bar{3}$, pro Indice Quoti: Et numerus 20 subtùs; qui additus figuræ dividuæ primæ 4, reddit ipsum 24: in quo Divisor 3 Octiès coutinetur.

Divisio.

3)	$\bar{7}$, 41842	2)	$\bar{5}$, 61228
Latus	$\bar{3}$, 80614	Latus,	$\bar{3}$, 80614

De Anatocismo, sive Usura composita.

Hoc est, Sex Theorematum fundamentalium, quibus Quæstiones omnes circa Anatocismum, facili negotio, solvi poterunt, investigatio Analytica.

Notandum autem est, quod Solidus Anglicus continet 12 Denarios : Et Libra sive Mina continet 20 Solidos; Denarios verò 240.

1. RAtio fœnoris reducenda primò est ad Rationem æqualem, cujus antecedens sit 100, vel 1. Ut si Ratio sit Denariorum 19,2, vel Solidorum 1,6, pro 1 Libra : Dic, 240. 259,2, vel 20. 21,6::100. 108::1. 1,08: nempe $\alpha . \beta$. Quare β procreatur ex sorte α, in uno anno integro.

2. Si vero Solutio sit per semissem anni, vel per Quadrantem, hoc est per Dies 182,5, vel per Dies 91,25 : Pro β, multiplicetur Logarithmus Procreat; annui per $\frac{1}{2}$, vel per $\frac{1}{4}$: Sive & per $\frac{182,5}{365}$ vel per $\frac{91,25}{365}$. Perperam enim vulgò sumitur $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{4}$ annui fœnoris.

3. Quia in progressione, numerus Rationum unitate minor est, quàm N numerus terminorum, sive

Solutionum; erit numerus Rationum N−1. Item Logarithmus β ductus in N−−1, erit Logarithmus ω ultimi termini. Denique Logarithmus β ductus in N, erit Logarithmus $\beta\omega$, hoc est, ipsius β multiplicati in se continuè pro numero Solutionum.

4. Quare $\beta\omega$ procreatur ex α sorte, sive 1^{lb}, elocata pro N vicibus. Hinc Duo oriuntur Theoremata.

Theo: I. $1^{lb}. \beta\omega :: Q^{lb}.$ Q^{lb} cum lucro in N vicibus.

Theo: II. $\beta\omega : 1^{lb} :: Q^{lb}$ post N vices. valor præsens.

5. Deinde quia $\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}$, hoc est, $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}=Z$, summa omnium terminorum Progressionis (quorum ultimus est ω) estque idcirco Procreatum ex Pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus: Hinc Duo oriuntur alia Theoremata.

Theo: III. $\beta-1. \beta\omega-1 :: Q^{lb}$ Pensio intermissa pro N vicibus. Pensiones cum fœnore solvendæ in fine.

Theo: IV. $\beta\omega-1. \beta-1 :: Q^{lb}$ futura. Pensio æquivalens solvenda in N vicibus.

6. Denique quia $\beta\omega$ procreatur ex 1^{lb} elocata pro N vicibus: Estque $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$ procreatum ex Pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus; quod in pecuniis numeratis æquivalet pretio Pensionis: Dic, $\beta\omega. 1^{lb} :: \frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$. $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1 \text{ in } \beta\omega}$: Unde igitur in N vicibus procreabitur $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$

Pretium

Pretium Pensionis. Hinc etiam oriuntur duo Theoremata.

Theo: V. $\beta - 1$ in $\beta\alpha . \beta\omega - 1 :: Q^{lb}$ Pensio pro N vicibus. Pretium ejusdem in pecuniis numeratis.

Theo: VI. $\beta\omega - 1 . \beta - 1$ in $\beta\omega :: Q^{lb}$ præsens. Pensio emenda pro N vicibus.

Nota quod Q^{lb} significat quantamlibet librarum summam.

Exemplum de Pensione durante 10 annos, solutione semestri; in Ratione 1 ad $1{,}\underline{08}$: Estque N 20. Et Logar: $1{,}\underline{08}$ est 0,03342.

0,03342 in $\frac{1}{2}$

0,01671 Log: $\beta = 1{,}\underline{03}96$

20 N

0,33420 Log: $\beta\omega = 2{,}\underline{15}9$

$\bar{2}$,59769 Log: $\beta - 1 = 0{,}\underline{03}96$

$\bar{2}$,93190 Log: $\beta - 1$ in $\beta\omega$

0,06408 Log: $\beta\omega - 1 = 1{,}\underline{15}9$

Est igitur,

0,06408

$\bar{2}$,93190

1,13218 Logar: pretii $13{,}\underline{56}^{lb}$ pro Pens: 1^{lb}.

$\bar{2}$,93190

0,06408

$\bar{2}$,86782 Logar: Pensionis $0{,}\underline{07}376^{lb}$ pro Pret: 1^{lb}.

Logarithmis hisce inventis adde Logar: $Q^{'b}$.
Vel valores hosce inventos multiplica per $Q^{'b}$.

REGULA FALSÆ POSITIONIS.

Multiplica Positiones per alternos errores. Et si errores sint ejusdem generis, nempe uterque excedens, vel uterque deficiens; Differentiam productorum divide per Differentiam errorum; Si verò diversi sint generis; Summam productorum divide per Summam errorum: Et Quotus dabit numerum quæsitum.

Demonstrationis gratia. Quis numerus est, qui ductus in B, producit planum BA, nempe ℞Apl.

Esto A - C   Esto A - D.
in B. BA - BC   in B. BA - BD
Errores igitur sunt
BApl - BA + BC.   BApl - BA + BD.

Quia utrobique signa sunt similia; ut quæ æqualia sunt, expurgentur; opus est ut Subductio fiat, mutando omnia signa minoris. Nam sic æqualibus se mutuò elidentibus, manebit errorum Differentia, BC - BD.

BC defic:	BD defic:
A - D	A - C
BCA - BCD	BDA - BDC

Hîc etiam æqualibus utrinque per Subductionem expunctis; Reductio fit ad BCA-BDA : quæ est ipsa errorum differentia ducta in A.

$$\text{Quare } \frac{BCA - BDA}{BC - BD} = A.$$

Iterum	Esto $A+C$.	Esto $A-D$
	in B. $BA+BC$	in B. $BA-BD$

Errores igitur sunt.

$BA+BC-BA$ pl. BA pl $-BA+BD$.

Quia utrobique signa sunt contraria ; æqualia per Additionem, absque ulla signorum mutatione, se mutuò elident : Et sic manebit errorum summa, $BC+BD$.

BC exced:	BD defic:
$A-D$	$A+C$
$BCA-BCD$	$BDA+BCD$.

Hîc etiam æqualibus utrinque per Additionem expunctis ; Reductio fit ad BCA+BDA : quæ est ipsa errorum summa ducta in A.

$$\text{Quare } \frac{BCA + BDA}{BC + BD} = A.$$

Notæ seu symbola quibus in sequentibus utor:

Æquale $=$. Simile *Sim.*
Majus ⊏. Proxime majus ⊏‾.
Minus ⊐. Proxime minus ‾⊐.
Non majus ⊏̸. Æquale vel minus $\sqsubseteq$.
Non minus ⊐̸. Æquale vel majus $\sqsupseteq$.
Proportio, sive ratio æqualis $::$
Major ratio $-\!\!:\!\!-$. Minor ratio $-\!\!:\!\!-$.
Continuè proportionales $\div\!\!\div$.
Commensurabilia ⊓.
Incommensurabilia ⊓̸.
Commensurabilia potentiâ ⊓.
Incommensurabilia potentiâ ⊓̸.
Rationale, ῥητὸν, R, vel ռ.
Irrationale, ἄλογον, ռ̸.
Medium sive mediale *m*
Linea secta secundum extremam & mediam rationem $\left.\right\}$ $\sigma\,\varsigma$
Major ejus portio σ
Minor ejus portio τ.

Z est A + E. ℨ est a + e.
Z est Aq + Eq. ℨ est aq + eq. ℨ
X est Aq − Eq. ꭓ est aq − eq. ꭓ
Æ est A E rectang. æ est a e rectangulum.
▯ rectangulum. □ quadratum.
Δ Triang: ℒ latus.
media proportionalis, m.

+ Signum Additionis Plus
− —— Subductionis Minus
ɯ —— Evolutionis
⊚ —— Involutionis.

ELEMENTI DECIMI
EUCLIDIS
Declaratio.

AD def: 1. Eandem mensuram duas magnitudines metiri, tum dicit, quando ipsarum quoti mensuras certas, & veris numeris explicabiles habent. Commensurabiles igitur magnitudines sunt, quarum ratio in veris numeris dari poterit : quales sunt in genere quadratico, radices quadratæ planorum similium : & in genere cubico, radices cubicæ solidorum similium. Exempli gratiâ, in planis 18 & 50, nempe 3×6, & 5×10, similibus (est enim $3.6::5.10$) $\sqrt{q}\,18$, & $\sqrt{q}\,50$ sunt latera commensurabilia ; quia divisa $\sqrt{q}\,2$ maximam utriusque communem mensuram, dant $\sqrt{q}\,9$ & $\sqrt{q}\,25$, hoc est 3 & 5. Sunt igitur $\sqrt{q}\,18$ & $\sqrt{q}\,50$ in ratione 3 ad 5.

Ad def: 2. $\sqrt{q}\,12$ & $\sqrt{q}\,64$ sunt latera incommensurabilia : nam quamvis ad minores terminos poterint reduci per $\sqrt{q}\,4$ maximam utriusque communem

nem mensuram; fientque $\surd q\,3$ & $\surd q\,16$: non tamen dicuntur commensurabilia; quia non sunt ut numerus ad numerum. Est enim $\surd q\,3$ numerus non verus, sed surdus.

Ad def: 3. At vero linearum sive laterum $\surd q\,12$ & $\surd q\,64$, quadrata 12 & 64 sunt commensurabilia; quia area 1 utrumque metitur : nam area 12, aream 1 continet duodecies; & area 64, ipsam aream 1, continet sexagies & quater. Quare quadrata illorum laterum sunt in ratione 12 ad 64. Atque hinc sequitur quod omne latus surdum generis quadratici numero rationali, sive vero cuicunque potentiâ est commensurabile : modo si intelligantur ejusdem esse generis sive dimensionis : At si unum ex iis intelligatur esse latus sive linea, & alterum planum sive superficies, non erunt commensurabilia potentiâ.

Ad def: 4. Sunt igitur lineæ potentiâ incommensurabiles diversorum generum : nempe una lateralis, altera quadratica; vel una quadratica, altera quadrato-quadratica. Exempli gratia, laterum $\surd q\,3$ & $\surd q\,2$ quadrata sunt 3 & 2 : & inter ipsa planum medium proportionale $\surd q\,6$. Quare plana sive potentiæ 3 & 2 incommensurabilia sunt ad planum $\surd q6$. Ideoque ipsorum latera $\surd q3$ & $\surd q\,2$ ad $\surd qq6$ sunt incommensurabilia etiam potentiâ.

$$\surd q3. \quad \surd q2.$$
$$3. \ \surd q6. \ 2.$$
$$\surd q3. \surd qq6. \surd q2.$$

Atque hujusmodi media proportionalia tum plana, tum latera, Euclides postea Media sive Medialia nuncupat.

Ad

Ad def. 5. Si linea proposita vero numero sit explicabilis; omnes lineæ veris numeris explicabiles, sunt ipsi commensurabiles. Si verò linea proposita sit latus surdum, puta $\sqrt{q}\,3$, linea illi quacunque ratione commensurabilis invenitur per proportionem. Ut si ratio data sit 2 ad 5: Dic $2.5::\sqrt{q}\,3.\sqrt{q}\,\frac{75}{4}$.

Dicitur ῥητὴ, sive rationalis linea vero numero explicabilis; ratione cujus aliæ lineæ ad ipsam comparatæ, considerantur vel commensurabiles vel incommensurabiles, idque longitudine vel potentiâ.

Atque his bene perspectis, reliquæ definitiones nihil habebunt difficultatis.

Sequuntur Lemmata.

1. Rectangulum sub ir & 'ir est 'ir. Nam irrationalium aggregatio quantacunque non mutat speciem.

Si linea Z secetur inæqualiter in A & E, erit Z − 2AE = Xq. Et Z + 2AE = Zq.

3. Si lineæ Z componatur tum ex A+E, tum ex a+e: erit $Z - \zeta_1 = 2æ - 2Æ$.

Item, si linea X constituatur tum ex A−E, tum ex a−e: erit $Z - \zeta_1 = 2Æ - 2æ$.

4. A.E::Aq.Æ::Æ.Eq.

5. Si A & E sint ⊤: erunt 1°, Aq, Eq, Z, X ⊓: ideoque simul ir vel mr.

Erunt 2°, Aq, Eq, Z, X ⊓ 2Æ. per 4.

Erunt 3°, Z, 2Æ, Zq, Xq ⊓.

Erunt 4°, X, 2Æ, Zq, Xq ⊓. Nam Zq =

Z+2Æ: & Xq = Z − 2Æ. & Zq = 4Æ + Xq.

6. Si A & E 'ℸ, erunt Aq, Eq Zq, Æ, Z, X, Xq ⊓.

Propositiones Elementi X^i.

9. Novem priores propositiones docent lineas commensurabiles esse, ut numerus ad numerum, atque ideo eorum quadrata esse, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. In incommensurabilibus autem contra esse. Earum enim quadrata non sunt ut Q.Q. √q 45 & √q 20 sunt lineæ commensurabiles, quia ipsarum quadrata 45 & 20 sunt ut 9 & 4, numeri quadrati, quorum radices sunt 3 & 2, sunt igitur √q 45 & √q 20 in ratione 3 ad 2.

Coroll: ad 9. Lineæ ⊓ sunt etiam ℸ : at non contra. Sed lineæ 'ℸ non sunt idcirco 'ℸ.

10. Si sit B.C::D.F. sintque B, C ⊓ vel '⊓: etiam D, F ⊓ vel '⊓ erunt.

12. 14. Si B ⊓ C, & C, D ⊓ vel '⊓, etiam B, D ⊓ vel '⊓ erunt.

13. Si B ⊓ D; & C '⊓ D: erit B '⊓ C.

Coroll: ad 14. Si B '⊓ C; at B ⊓ D, & C ⊓ F: erit D '⊓ F.

16. 17. A, E, Z sunt simul ⊓ vel '⊓.

11. Invenire B, D '⊓ : & B, C 'ℸ. Sumantur duo aliqui numeri 3 & 2, qui non sint ut Q.Q. fiatque 3.2::B.F: Item B.D::D.F. Quare B.F::Bq. Dq. At B, F non sunt Q.Q: ideoque nec Bq.Dq sunt ut Q.Q. Ergo B, D ⊓ per 9.

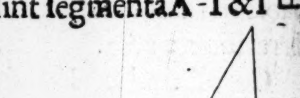
Iterum

Iterum fiat B.C::C.D: sunt igitur Bq,Cq ⊓ : quare B,C ⊐ . √q 3. √qq 6. √q 2.

Coroll: ad 11. *m* inter duas ⊓, est utrivis ipsarum ⊐; & *r*, si alterutra ex iis sit *r*.

15. Si sit A.E:: a.e. & sit A ⊓ √q: Aq - Eq; scil: X: erit etiam a ⊓ √q: aq - eq, scil: ☋. Nam Aq. Eq::aq. eq: quare Aq.Aq-Eq::aq.a-eq. Ergo per 20.

18.19. Si sint duæ lineæ A & E: adplicetur autem ad A rectangulum æquale quadrato semissis E, deficiens figura quadrata: hoc est, dividatur A in duas partes A-I & I, sic ut ▯m segmentorum æquetur □o $\frac{1}{2}$E; nempe AI-Iq = $\frac{1}{4}$Eq. Et sint segmenta A-I & I ⊓; erit etiam A ⊓ √q: Aq-Eq. & Converse: & contra. Nam per 47 e 1, $\frac{1}{4}$Aq - $\frac{1}{4}$ Eq = Q $\frac{1}{2}$ A-I: quare √q: Aq-Eq: est A-2I. At per 16 & hypoth: A-2I, & A sunt ⊓.



22. 23. Ex A, E *r* ⊐ fit Æ *r*, scil: *m*: & √q Æ, est *r* & *m*, (vide annotata ad def. 4). Nam A.E::Aq.Æ quare Æ ⊓ Aq *r*, erit *r*. Est etiam Æ *m*. Nam si A sit √q 3, & E √q 2; erit Æ √q 6 planum, cujus radix est √qq 6. At vero tum quadrata 3, √q 6, 2; tum ipsorum radices √q 3, √qq 6, √q 2 sunt ∺. & in neutris medius terminus est ejusdem rationis sive commensurationis cum suis extremis, sed utrique incommensurabilis.

24. Si

24. Si B sit ⌐ɟ saltem ipsi C mr͂, erit etiam B mr͂. Nam ad expositam R per 23, fiat RD = Cqmr͂, & RF = Bq. Quare RD ⌐⊓ RF : ideoque FD ɹ⌐⊓. Est autem per 22, R ⌐⊓ D : idcirco etiam R ⌐⊓ F. Ergo Bqmr͂ : atque ipsa B mr͂.

20.21.25. Ex A,E ɹ⌐⊓, fit Æ similiter ɹ : & converse. Et ex A,E mr͂⌐⊓, fit Æ mr͂ : & converse. Nam A.E::Aq.Æ. At Aq est ɹ vel mr͂. ergo & Æ similiter ɹ vel mr͂, per 24.

26. Ex A, E mr͂⌐ɟ, fit Æ ɹ vel mr͂. Nam ad expositam R, fiat RB = Aq : & RC = Æ : & RD = Eq. Sunt igitur B:D ɹ⌐⊓, per 23. Et quia C est m∷ inter B & D ; erit Cq ɹ ideoque & ipsa C ɹ. Si igitur C ɹ⌐⊓ R, erit Æ ɹ. Si vero C ɹ⌐⊓ R, erit & Æmr͂.

27. Si □□ᵐ B mr͂ constet ex □° Cmr͂, & □ D : erit etiam □ᵐ D ɹ. At non converse. Nam aliter fingatur □ D ɹ. Ad expositam R fiat RA = □ᵐ Cmr͂ ; & RE = □ᵐ D; & RZ = □ B mr͂. Erit igitur Z ɹ⌐⊓R: & A ɹ⌐⊓ R : & E ɹ⌐⊓ R. Quare A,E ɹ⌐⊓. Estque Z ɹ. At Z ⌐⊓ Zq. Est igitur Zq ɹ, & Z ɹ : quod ostensum est falsum. Ergo.

28. Invenire duas A,E mr͂⌐ɟ, ita ut Æ sit ɹ. Sumantur B, C ɹ⌐ɟ : fiatque B.A::A.C::C.E. Dico I°, A,E mr͂: Nam Aq = BCmr͂, per 22. Dico II°, A,Emr͂ ⌐ɟ : Nam B.C::A.E. Quare per 24. Dico III° Æ ɹ : Nam AE = Cqɹ.

29. Invenire duas AE mr͂⌐ɟ, ita ut Æ sit mr͂. Sumantur B,C,D ɹ⌐ɟ : fiatque B.E::E.D::A.C. Dico I°,

I°, A, E mr : Nam Eq = BD mr. Dico II°, AE mr ⊤ʒ: Nam D. C :: E. A. Dico III°, Æ mr : Nam AE = BC mr.

Exemplum pro 28. B2. C√q3. A√qq 12. E√qq $\frac{27}{4}$. A E 3.

Exemplum pro 29. B√q5. C 2. D√q3. E√qq15. A√qq $\frac{80}{3}$. AE √20.

30. Invenire duas A, E ir ⊤ʒ, ita ut A ⊤⊥ sit √qX. Sumantur duo numeri quadrati aq, eq; ita ut aq−eq non sit Q. Tum exposita A ir, fiat aq. aq−eq :: Aq. Eq. Erit igitur etiam aq. eq :: Aq. X, per 19 e 5.

Dico I°, A, E ir ⊤ʒ: Nam Aq, Eq non sunt ut Q Q.

Dico II°, A ⊤ʒ √q X: Nam sunt ut Q. Q.

Exemplum pro 30. Aq & aq sunt 9. eq & X 4.

31. Invenire duas A, E ir ⊤ʒ, ita ut A ⊤⊥ √qX. Sumantur duo numeri aq, eq, quadrati; ita ut aq+eq non sit Q. Tum exposita A ir, fiat aq+eq. aq :: Aq. Eq. Erit igitur aq+eq. eq :: Aq. X, per 19 e 5.

Dico I°, A, E ir ⊤ʒ: Nam Aq, Eq non sunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊤⊥ √qX: Nam Aq, X non sunt ut Q. Q.

Exemplum pro 31 aq & eq 4. eq & X 1.

32. Invenire duas A, E mr ⊤ʒ, ita ut Æ sit ir; & A ⊤⊥ √qX. Summantur per 30, duæ a, e ir ⊤ʒ, ita ut a ⊤⊥ √q: aq−eq. fiatque a. A :: A. e :: e. E. Dico I°, A, E mr ⊤ʒ, per 22 & 24. Nam Aq = ae mr: & a. e :: A. E, ⊤ʒ. Dico II°, Æ ir: Nam AE = Eq ir. Dico III°, A ⊤⊥ √qX, per 15. Nam a ⊤⊥ √q: aq−eq. Exemplum

plum a 2. e√q3. A√qq 12. E√qq $\frac{27}{4}$.

Quod si per 31, Sumerentur a e ꭥ ꟻ; ita ut a ⊏⊐ √q: aq-eq: Inventæ fuerint A,E ᵯ ꟻ, ita ut Æ sit ꭥ; & A ⊏⊐ √qX.

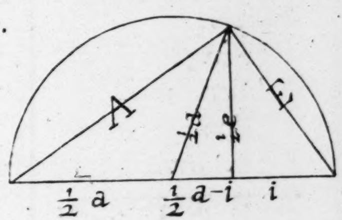
Exemplum a√q5. e 2. A √q 20. E√q $\frac{64}{5}$.

33. Invenire duas A,E ᵯ ꟻ, ita ut Æ sit ᵯ; & A ⊏⊐ √q X. Sumantur per 30, duæ a, e ꭥ ꟻ; ita ut a ⊏⊐ sit aq-eq: & sumantur i ꭥ ꟻ utrique a e: fiatque a.A::A.i::e.E. Dico 1°, A, E ᵯ ꟻ: Nam Aq = a i ᵯ: Estque a.e::A.E. Dico 11 Æ ᵯ. Nam AE = i e ᵯ. Dico 111°, A ⊏⊐ √qX: Nam a ⊏⊐ √q aq-eq: quare per 15.

Exemplum a 2. e √q5. i √q 2. A√qq8. E √qq $\frac{5}{2}$.
Quod si per 31, sumerentur a, e ꭥ ꟻ, ita ut a ⊏⊐ √q: aq-eq: Inventæ fuerint A, E ᵯ ꟻ, ita ut Æ sit ᵯ: & A ⊏⊐ √qX.

Exemplum, a √q5. e √q2. A √qq 20. E√qq $\frac{16}{5}$.
Præparatio ad propositiones 34,35,36, demonstrandas in tribus lemmatibus.

Lemma primum. Si ad a adplicetur rectangulum æquale Q.½ e, deficiens figura quadratâ: divisâ scil: a in a-i & i; ita ut a-i. ½e::½ e.i. Erit ½ a-i = √u: ¼ aq-¼ eq: sicut in schemate adparet, Atque per hanc in interpretationem, a-i = ½a + √u: ¼aq-¼eq & i = ½a-√u: ¼aq-¼eq. Et quia Aq = Q: a-i: + ¼eq. & Eq = i q + ¼ eq. Nempe Q. ½ a ± √u: ¼aq-¼



eq:

eq: $+\frac{1}{4}$eq. Hac adhibita interpretatione.

Erit A $=$ $\sqrt{}$u: $\frac{1}{2}$aq $+$ $\sqrt{}$u: $\frac{1}{4}$aqq $-$ $\frac{1}{4}$aqeq.

Et E $=$ $\sqrt{}$u: $\frac{1}{2}$aq $-$ $\sqrt{}$u: $\frac{1}{4}$aqq $-$ $\frac{1}{4}$aqeq.

Nam in quadratione lineæ $\frac{1}{2}$a $+$ $\sqrt{}$u: $\frac{1}{4}$aq $-$ $\frac{1}{4}$eq. Z est $\frac{1}{4}$aq $+$ $\frac{1}{4}$aq $-$ $\frac{1}{4}$Eq. Et Æ est $\sqrt{}$u: $\frac{1}{16}$ aqq $-$ $\frac{1}{16}$aqeq: quod duplicatum fiet $\sqrt{}$u: $\frac{1}{4}$aqq $-$ $\frac{1}{4}$aqeq. huic si adjungatur $+\frac{1}{4}$ eq; abolebitur alterum $-\frac{1}{4}$ eq.

Lemma secundum: a$-$i.i :: Aq.Eq, ⊓.

Nam a.A :: A.a$-$i, Et a.E :: E.i; Quare a.a$-$i :: aq.Aq, a.i :: aq.Eq.

Lemma tertium: a.A :: E $\frac{1}{2}$e.

34. Invenire duas A,E ℸ, ita ut Z sit ῥ, & Æ μῥ. Sumantur per 31, a,e ῥ ℸ, ita ut a ⊓ $\sqrt{}$q: aq$-$eq: & ex ipsis inveniantur A,E, Sicut in *Lem.pri.*

Dico I° A,E ℸ: Nam per *Lem.sec*: Aq,Eq ⊓.

Dico II° Z ῥ: Nam in 31, A,E (quibus hic respondent a,e) sunt ῥ ℸ.

Dico III°, Æ μῥ. Nam per *Lem. tert*: AE $=\frac{1}{2}$ ae μῥ.

35. Invenire duas A,E ℸ, ita ut Z sit μῥ, & Æ ῥ. Sumantur per 32, a, e μῥ ℸ, ita ut æ sit ῥ, et a ⊓ $\sqrt{}$q: aq$-$eq: Et ex ipsis inveniantur A, E, sicut in *lem:pri:*

Dico I° A E ℸ, per *lem:secun.*

Dico II°, Z μῥ, per 32.

Dico III°, Æ ῥ: Nam per *lem:tert*: AE $=\frac{1}{2}$ ae ῥ.

36. Invenire duas A, E ℸ, ita ut Z et Æ sint μῥ. Sumantur per 33, a, e μῥ ℸ, ita ut æ μῥ, et a ⊓ $\sqrt{}$q: aq$-$eq.

Dico

Dico I°, A, E ⊐, per lem: sec.

Dico II° Z mr, per 33.

Dico III°, Æ mr: per lem: tert. consulatur etiam Schema.

Coroll: ad 36: Hinc inveniri possunt duæ lineæ mr ⊓, scil: √q Z, & √q Æ.

Principium Senariorum per Compositionem.

37. Si sumantur a, e ꝛ ⊐; tota a + e hoc est ʒ, erit ꝛ; vocaturque *Binomium*, scil: ꝶ *Bin:* I. Nam per lemma 5, ʒq ⊓ $ʒ_1$ ꝛ.

2 + √q3. Cujus Q: est 7 + √q48.

28. Si sumantur a, e mr ⊐ (per 28) ita ut æ sit ꝛ; tota ʒ erit ꝛ; vocaturque *Bimediale* prius, scil: ꝶ *Bin:* II. Nam per lemma 5, ʒq ⊓ æ ꝛ.

√qq 12 + √qq $\frac{27}{4}$. Cujus Q: est √q $\frac{147}{4}$ + 6.

39. Si (per 29) sumantur a, e mr ⊐, ita ut æ sit mr: tota ʒ erit ꝛ; vocaturque *Bimediale* posterius, scil: ꝶ *Bin:* III. Nam ʒq, hoc est $ʒ_1$ + 2 æ, est ꝛ. Nam expositâ R, fiat RT = ʒq; & RP = $ʒ_1$ mr, per 16 & 14: Erit RT − RP = 2 æ. Sunt autem per lem: 5, RP & RT − RP mr ⊐: Quare P, T − P ꝛ ⊐ ad R. Et per 37, T est ꝛ. Et per lem: 1, RT hoc est ʒq ꝛ.

√qq $\frac{80}{3}$ + √qq 15. Cujus Q: est √q $\frac{245}{3}$ + √q 80.

40. Si (per 34) sumantur a, e ⊓, ita ut $ʒ_1$. sit ꝛ, & æ mr; tota ʒ erit ꝛ; vocaturque Major, scil: ꝶ *Bin:* IV. Nam per lem: 6, ʒq ⊓ $ʒ_1$ ꝛ. √u: $\frac{5}{2}$ + √q $\frac{5}{4}$ pl: √u: $\frac{5}{2}$ − √$\frac{5}{4}$. Q: est 5 + √q 20.

41. Si (per 35) sumantur a, e ⊐, ita ut $ʒ_1$ sit mr,

& æ ꝛ; tota ζ erit ꝛ, vocaturque *Potens rationale & mediale*, scil: ♃ *Bin:* V. Nam per lem: 6, ζq ⊓ æ ꝛ.
√u:√q5 + 1:pl: √u:√q5−1. Q: est √q 20 + 4.

42. Si (per 36) a, e ⊤⊦, ita ut ζ & æ sint mꝛ ⊤⊦; tota ζ erit ꝛ, vocaturque *Potens duo medialia.* Scil. ♃ *Bin:* VI. Nam ζq, hoc est ζ + 2æ est ꝛ. Exposita enim R, fiant RT = ζq, & RP = ζ: erit RT−RP = 2æ. Sunt autem RT & RT−RP mꝛ ⊤⊦: Quare per 22, P, T−P ꝛ ⊤⊦ ad R. Et per 37 T est ꝛ. Et per lem: 1, RT hoc est ζq ꝛ. Ergo ζ ꝛ.
√u:√q5+√q3:pl:√u:√q5−√q3.Q:est √q20+√q8

43.44.45.46.27.48. Neque ulla ex dictis sex lineis ꝛ, ζ potest dividi in sua nomina a,e, præterquam in uno eodemque puncto. Nam aliter dividatur iterum ζ in sua nomina A,E. Erit (per lem: 3) Z−ζ = 2æ−2Æ. At (per 37 & 40) in ♃ *Bin*: I,IV, Z−ζ est ꝛ; & 2æ−2Æ mꝛ, per 27. Et (per 38 & 41) in ♃ *Bin:* II.V, Z−ζ est mꝛ; & 2æ−2Æ ꝛ. Quare eadem quantitas erit ꝛ & ꝛ Quod est absurdum. In ♃ vero *Bin:* III, VI, Quoniam in 39 & 42, si supponatur ꝛ ζ dividi in a, e; fiatque RT = ζq, & RP = ζ, & RT−RP = 2æ; demonstratum est ꝛT dividi in nomina P,T−P ꝛ ⊤⊦. Item si iterum supponatur ꝛ ζ dividi in A,E, alia nomina; fiatque RT = ζq, & RS = Z & RT−RS = 2Æ; similiter demonstrabitur ꝛT. dividi iterum in nomina S & T−S ꝛ ⊤⊦, divisa ab iis P & T−P: quod contra priorem partem hujus demonstrationis. E[nim] ꝛT *Binomium.*

Defini

	Definitiones	&	Proprietates	
	♃ *Binom: & Apotom:*		*Binomiorum & Apotom.*	
I	a, e ϰ ⌐ : æ m͞		A ⊐ √qX : A ⊐ R	A ⊐ √qX : A ⊐ R ... AE ϰ ⌐ > AE
II	a, e m͞ ⌐ : æ ϰ		A ⊐ √qX : E ⊐ R	
III	a, e m͞ ⌐ : æ m͞		A ⊐ √qX : AE ⊐ R	
IV	a, e ⌐ : ʒ ϰ : æ m͞		A ⊐ √qX : A ⊐ R	
V	a, e ⌐ : ʒ m͞ : æ ϰ		A ⊐ √qX : E ⊐ R	
VI	a, e ⌐ : ʒ & æ m͞ ⊐		A ⊐ √qX : AE ⊐ R	

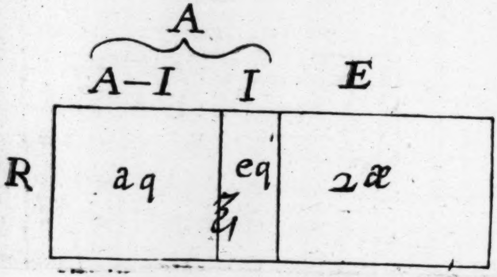
49.50.51.52.53.54. Invenire ſex *Binomia* A+E. Sumatur N [9] & dividatur tum in 5 & [4]; tum in 6 & 3: & exponatur R.

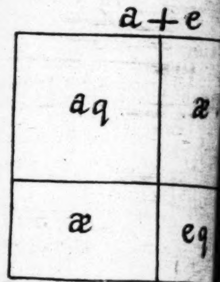
Pro *Bin:* I.IV. Sit A ⊐ R; fiatque [9] $\frac{5}{6}$ :: Aq. Eq.

Pro *Bin:* II.V. Sit E ⊐ R; fiatque $\frac{5}{6}$ [9] :: Eq. Aq.

Pro *Bin:* III.VI. Sumatur tertius N (2), qui nec ad 9, nec ad 5, nec ad 6, ut Q.Q. fiatque 2. [9] :: Rq. Aq ϰ. Deinde [9] $\frac{5}{6}$ :: Aq. Eq ϰ: qui non ſunt ut Q.Q. Quare in omnibus ſex ſunt A.E ϰ ⌐. Item [9] [$\frac{4}{3}$] :: Aq. X.

55.56.57.58.59.60. Si ſingula ſex *Binomia* A+E ducantur in expoſitum R: √q:AR+ER: conſtituet ordine ſingulas ſpecies ♃ *Binom.* Nam (conſideratis prius intente proprietatibus cujuſque tum *Binomii*, tum ♃ *Bin:* in tabella præmiſſa) dividatur A in A-I & I, ita ut AI-Iq = $\frac{1}{4}$ Eq. Erit igitur A-I. $\frac{1}{2}$ E :: $\frac{1}{2}$E.I. fiat etiam aq = AR-IR: & eq = IR.





Probatur I°, a + e esse √q : AR+ER. Est enim AR−IR. ½ ER :: ½ ER . IR: Item aq.æ::æ.eq. Quare ½ ER = æ. Ergo Q: a + e : = AR + ER.

Probatur II°, In tribus prioribus *Binom:* a, e esse ⊓̸. Nam quia (per 18) AR−IR ⊓ IR, erit AR−IR ⊓ AR: at AR ⊓̸ ER: ergo AR−IR ⊓̸ ER: hoc est aq ⊓̸ æ: Est autem aq.æ::a.e.

In tribus posterioribus *Binom:* a, e esse ⊓̸. Nam (per 19) AR−IR, IR, hoc est aq, eq ⊓.

Probatur III°, In *Bin:* I, a, e esse ꝛ. Nam AR−IR, IR, hoc est aq, eq ⊓ sunt AR ꝛ.

In *Bin:* II, a, e esse mꝛ: Nam quia A−I, I ⊓ A ⊓̸ R; Erit AR−IR, IR, hoc est aq, eq mꝛ: at a, e ⊓. Item æ esse ꝛ: Nam 2æ = ER ꝛ.

In *Bin:* III, a, e esse mꝛ, ut ante. Item æ esse ꝛ: Nam ER hoc est 2æ mꝛ, quia E ꝛ ⊓ R.

In *Bin:* IV. aq + eq, hoc est AR, esse ꝛ. Nam A ꝛ ⊓ R. Item 2æ, hoc est ER, esse mꝛ: ut ant

In *Bin:* V, aq+eq, hoc est AR, esse mꝛ. N A ꝛ ⊓̸. Item 2æ, hoc est ER, esse ꝛ. Nam E ꝛ ⊓ R

In *Bin:* VI, aq+eq, hoc est AR; Item 2 æ, hoc est ER, esse *mr*. Nam A, E r⊓R.

Atque in omnibus his tribus posterioribus liquet a & e esse ⊔⊓, quia aq, eq ⊓.

Confect: Latus quadratum singulorum *Binomiorum* A+E constituet ordine singulas species ♃ *Bin:* a+e. Nam posita R esse 1, nihil per multiplicationem immutabitur. Unde majus quadratum erit A−I cujus latus est a: & minus quadratum I, cujus latus est e. Ostensum autem est ad prop: 34, in lem: pri: A−I esse $\frac{1}{2}$ A + √u: $\frac{1}{4}$ Aq − $\frac{1}{4}$ Eq. Et I esse $\frac{1}{2}$ A − √u: $\frac{1}{4}$Aq − $\frac{1}{4}$Aq − $\frac{1}{4}$Eq. Atque hinc patet Analysis *Binomii*; cujus hæc est regula.

Si è quadrato semissis nominis majoris tollatur quadratum semissis nominis minoris; & latus quadratum excessus semissi nominis majoris addatur, dabit quadratum majus: sin detrahatur, minus.

Si igitur semis nominis majoris, & latus quadratum excessus, sint commensurabiles, ♃ *Bin:* erit bimembre. Si incommensurabiles, quadrimembre.

61.62 63.64.65.66. Si quadratum ex r a + e, ♃ *Bin:* aliquo, ad expositum R adplicetur; latitudinem faciet A + E, idem *Binomium*. Nam (sicut in Schemate ad 55) fiat AR+ER = Q: a + e: Et AR−IR = aq. Et IR = eq: ideoque ER = 2æ. Probatur 1°.

In tribus prioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX: Nam a, e ⊔⊓; quare AR−IR, IR ⊓. Ergo per 18.

In tribus posterioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX:

Nam a, e sunt ˈ⊓ : quare AR - IR, IR ˈ⊓. Ergo.

Probatur II°, A, E esse ꝛ ⊐, &c. Nam in *Bin:* I A est ꝛ ˈ⊓ R; & E ꝛ ˈ⊓ R : est enim AR, hoc est aq+eq ꝛ. & ER, hoc est 2 æ ˈ⊓ aq+eq, per lem 5.

In *Bin:* II, E est ꝛ ˈ⊓ R: & A ꝛ ˈ⊓ R : Est enim ER, hoc est 2 æ ꝛ. Et AR, hoc est aq+eq, ˈ⊓ æ, per lem: 5.

In *Bin:* III, A & E sunt ꝛ ˈ⊓ R: Est enim AR, hoc est ʒ₁ : & ER, hoc 2 æ mꝛ.

In *Bin:* IV, A est ꝛ ˈ⊓ R : & E ꝛ ˈ⊓ R: est etiam AR, hoc est ʒ₁, ꝛ; & ER, hoc est, 2 æ, mꝛ. Et

In *Bin:* V. VI, similiter ex proprietatibus eorum poterit argui.

67. Si *Binomio* alicui A+E ⊓ sit B+C; Erit etiam *Binomium* ordine idem. Nam fiat A+E. B+C :: A.B :: E.C, ⊓, per 14. & 16. Item per 15, Si A, √q: Aq - Eq ⊓ sit vel ˈ⊓ : Erit etiam B, √q: Bq-Cq: ⊓ vel ˈ⊓.

68. Si in ℞ *Bin:* II. III, a, e ⊓ b c : Erit *Bimediale* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c :: a.b :: e.c, ⊓. Sunt autem a, e mꝛ ⊐ : Ergo b, c, mꝛ ⊐ per 24. Item a.c :: aq æ: Et b.c :: bq.bc: quare aq.bq :: æ.bc, ⊓. Ergo si æ ꝛ sit vel mꝛ; Etiam bc ꝛ vel mꝛ erit.

69. 70. 71. Si in tribus posterioribus ℞ *Bin:* a, e ⊐ b, c : Erit ℞ *Bin* : ordine idem. Nam fiat a+e. b+c :: a. b :: e.c, ⊐ saltem. Sunt autem a, e ⊐. Ergo b, c ⊐. Item quia aq. bq :: eq. cq :: aq+eq bq+cq, ⊐ saltem : Si aq+eq ꝛ vel mꝛ; etiam bq+cq erit ꝛ vel mꝛ. Denique quia aq.æ :: a.e :: b.c :: bq.bc;

erit

erit aq.bq::æ.bc, ⅁ saltem. Si æ ɤ sit vel *mr*; etiam bc ɤ vel *mr* erit.

72. 73. Si duo spacia Ʒ & 2 æ componantur, quorum unum est ɤ, & alterum mediale; sitque ɤ majus; recta totum spacium potens erit ℞ B*in*: I. vel IV. Sin *mr* majus; recta totum spacium potens erit ℞ B*in*: II, vel V. Si vero duo spacia *mr* ⊓ componantur: recta totum spacium potens erit ℞ B*in*: III, vel VI. Nam si ad expositam R adplicetur AR+ER = Ʒ + 2 æ, conjunctim & seorsim, nempe AR = Ʒ : & ER = 2 æ; sive unum ex ipsiis sit ɤ, & alterum *mr*: sive utrumque *mr* ⅁. Clarum erit AR, ER esse ⊓; ideoque A, E ɤ ⅁. Quare si A ⊓ √qX, erit A+E unum ex tribus prioribus B*inomiis*. Si verò A ⊓ √q X, erit A+E unum ex tribus posterioribus B*inomiis*. Quodcunque autem ex ipsiis sex fuerit; latus illius (quod etiam est √u: Ʒ + 2æ) erit ℞ B*in*: ordine idem, per 55.56.57.58.59.60.

Principium Senariorum per detractionem.

74.75.76.77.78.79. Si ab *a* majore nomine cujusvis ℞ B*in*: auferatur e nomen minus, Reliquum a−e erit ɤ, ℞ *Apotome* ejusdem ordinis: vocaturque vel *Apotome*, vel *Residuum mediale primum, vel Residuum mediale secundum, vel Minor, vel Cum rationali totum mediale faciens, vel Cum mediali totum mediale faciens.*

Nam Idem probari potest de Ȝq, quod de Ʒq pro-

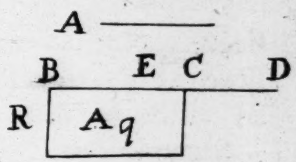
batum fuit, in 37.38.40.41. Sed pro ꝛ *Apot:* III. vel VI, ad expositam R, fiant RP = ȝq : & RT = ʒ, : Et RT-RP = 2æ. Et reliqua fiant sicut in 39. & 42. Nam ʒ,-2æ = ȝq.

80.81.82.83.84.85. Lineis hisce sex ɥ a-e, ꝛ *Apot:* una tantum congruit recta linea e, pro minore nomine. Nam aliter constituatur linea ȝ, nempe a-e, etiam ex A-E. Per lem: 3, Z-ʒ, = 2Æ-2æ: At in ꝛ *Apot:* I. IV, Z-ʒ, est ɥ, & 2Æ-2æ est ɱ. Et in ꝛ *Apot:* II. V, Z-ʒ, est ɱ : & 2Æ-2æ est ɥ (per 37.38 40.41): quare eadem quantitas est ɥ & ɥ: quod est absurdum : In ꝛ vero *Apot:* III. VI. Quoniam (sicut est in 45 & 48) Si supponatur ɥ & ȝ constitui ex a, e; fiatque RP = ȝq; RT = ʒ, : & RT-RP = 2æ : demonstratum est ɥ P constitui ex nominibus T, T-P, ɥ Ꝗ. Item si iterum supponatur ɥ ȝ constitui ex A, E aliis nominibus ; fiatque RP = ȝq : RC = ʒ, : & RC-RP = 2æ. Similiter demonstrabitur ɥ P constitui ex nominibus C, C-P (diversis a T & T-P) ɥ Ꝗ. Quod est contra priorem partem hujus demonstrationis. Est enim ɥ P ɥ *Apotome.*

86. 87. 88. 89. 90. 91 92. 93. 94. 95. 96. 97 98. 99. 100. 101. 102. 103 104 105. 106. 107. 108 109. 110. 111	demonstrantur verbatim de ȝ sicut de ʒ.	49.50.51.42.53.54 55.56.57.58.59.60 61.62.63.64.65.66 67 68.69.70.71 72. 73.

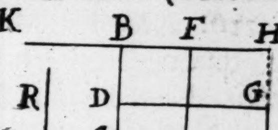
112. Eadem linea ɥ non est *Apotome*, & Bi-

mium. Nam esto A *Apotome*, puta ♃ *Apot:* I: Expositâ R, fiat R×BC=Aq. quare per 98 & 61, BC erit *Apotome* 1; ei congruat CD. Sunt igitur BD, CD ɤ⊐; & BD ⊓ R. Rursus ponatur A B*inomium*, puta ♃ B*in:* 1, fiatque R×BC=Aq: Erit per 61 BC B*in:* 1: cujus nomina sint BE, CE, ɤ⊐; & BE ⊓ R. Sunt igitur & per 16, BD, BE, ED ɤ⊓: ideoque ED, CD ɤ⊐: quare CE *Apot:* ɤ. At CE fuit & ɤ. Quod est absurdum,



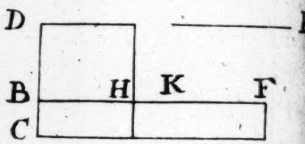
113. 114. Rq adplicatum ad B*inomium*, latitudinem facit A*potomen*. Sed adplicatum ad A*potomen*, latitudinem facit B*inomium*. Utrobique autem nomina sunt ⊓ & proportionalia, & utriusque ordo idem. Nam in utroque Schemate, fiat BC×BF=Rq =DC×BH ɤ⊓. Est igitur BC.DC::BH.BF: Et(BC-DC)BD.DC::(BH-BF)FH.BF. His sic ordinatis.

Pro 113, Esto B*inomium* aliquod BC, scil: BD+DC: fiatque FH--BF.BF::BF.BK. Est igitur (BF+BK) FK.BK :: FH.BF :: BD.DC, ɤ⊐. Quare FK, BK ⊐. Item (FK+FH) HK. FK :: (BK+BF) FK.BK, ⊐. Et HK. BK :: HKq. FKq :: FKq :: FKq. BKq ⊓. Unde & per 16, HK, BK, BH ⊓: At BH ɤ: quare HK, BK ɤ⊓: Et FK, BK ɤ⊐. Ergo per def: FK-BK, scil: BF est A*potome*.



Pro

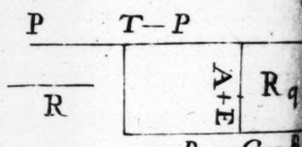
Pro 114. Esto *Apotome* aliqua BC, scil: DC-BD: fiatque FH. BF::HK.FK:: (FH-AK.BF-BK) FK. BK::FH.BF::BD.DC ɼ⊐⊏. Quare HK.FK::FK. BK⊐⊏: Et HKq, FKq⊓⊔. Unde & per 16, HK, BK, BH⊓⊔. At BH ɼ: Itaque BK ɼ, & FK, BK ɼ⊐⊏. Ergo per def: BK+FK, scil: BF. est *Binomium*.



Secundò DC, BK⊓⊔: Et BD, FK⊓⊔. Nam BK ⊓⊔BH⊓⊔DC. Et DC. BK::BD.FK. Ergo Tertio proportionalia.

Quarto sunt in eodem ordine; per 15 & 14.

115. Si *Apotomes* T-P, & *Binomii* A+E nomina sint ⊓⊔ & proportionalia: Nempe T.A⊓⊔::P.E⊓⊔; Dico ▯ T-P in A+E esse ɼ. Nam exposita R, fiat A+E in C-B=Rq. Est igitur C-B *Apotome*, per 113: Et A.C⊓⊔ :: E.B⊓⊔ : Quare C.T⊓⊔ :: C-B. T-P⊓⊔ :: A+E in C-B ɼ. A+E in T-P etiam ɼ. Et √q: A+E in T-P: ɼ.



116. A Mediali M fieri poterunt innumeræ lineæ ɼ, quæ nec Mediæ sunt, nec ullæ ex bis senis antedictis. Nam exposita R, fiat MR; & sit N=√q MR. Dico N esse ɼ, per lem: 1: at nec mediale; per 23: nec ullam ex bis senis, per 61, 62, 63, 64, 65, 66, & 98, 99, 100, 101, 102, 103.

Deinde

Deinde fiat RN. Et sit O $=\sqrt{q}$ RN: Dico O ⅂r nec Mediale esse, nec ullam ex his senis illis.

	M	N	O	P
R	RM	RN	RO	

Tertiò fiat OR, & sit P $=\sqrt{q}$ OR : Dico P⅂r esse nec Mediale, nec ullam &c. Et sic infinitum. Neque etiam ⅂r N, O sunt eædem. Nam N $=\sqrt{q}$ MR. & O $=\sqrt{q}$ NR : &c.

117. Diameter quadrati est lateri incommensurabilis: Nam alias si sit ⊓; esto Diameter ad Latus, ut numerus D ad numerum L.; sintque minimi termini in eadem ratione : Et ipsorum quadrata sunt verè numeri quadrati. At verò L non potest esse 1 ; quia quadratum diametri ad quadratum lateris est ut 2 ad 1 : ideoque 2 esset numerus verè quadratus. Nec potest L esse numerus aliquis multitudinis : quia cùm sit Dq.L::2,1; & Lq metiatur Dq; etiam L metietur D : ideoque D & L non erunt rationis suæ termini minimi: Est enim numerus multitudinis maxima utriusque communis mensura.

Finis Elementi decimi Euclidis.

De

De solidis regularibus.

1. **F**Igura quævis polygona rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora, quam sunt numeri laterum. Nempe quadrangulum dividitur in duo triangula: quinquangulum in tria; &c.

2. Quare si è numero laterum tollatur 2, & reliquus duplicetur: vel si è numero laterum duplicato tollatur 4: habebis summam angulorum rectorum in rectilinea quavis figura interius comprehensorum. Sic triangulum intra se continet duos rectos: quadrangulum quatuor: quinquangulum sex: &c.

3. Figuræ autem cujusvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis.

4. Quare si quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, sive angulorum: quotus erit quantitas unius anguli exterioris, in figura rectilinea ordinata. Sic angulus exterior in trigono ordinato est $\frac{4}{3}$ recti, sive grad: $\frac{360}{3}$: in tetragono ordinato $\frac{4}{4}$ recti sive gradus $\frac{360}{4}$: in pentagono ordinato $\frac{4}{5}$ recti, sive gradus $\frac{360}{5}$, &c.

5. Si quantitas anguli exterioris tollatur ex duobus rectis: vel si summa angulorum rectorum interiorum dividatur in numerum laterum: habebis quantitatem unius anguli interioris, in figura rectilinea ordinata. Sequitur pars prior ex 4: posterior ex 2. Exempli gratia, In octogono ordinato, anguli unius exterioris quantitas est $2-\frac{4}{8}$ vel Gra: $180-\frac{360}{8}$. Item 8) 12(1 $\frac{1}{2}$ recti: vel Gra: 8) 12×90(135.

6. Tri

6. Tres anguli plani recti, vel gradus 270, includunt angulum rectum ſolidum.

7. Quare ſi omnes anguli plani includentes angulum ſolidum, addantur; & aggregatum per 3 angulos rectos, ſive gradus 270, dividatur: habebis quantitatem totius anguli ſolidi. Exempli gratia, Anguli ſolidi Icoſaëdri, quem quinque anguli trigoni ordinati includunt (nempe $5 \times \frac{2}{3}$ recti; vel Gra: 5×60) quantitas erit $\frac{10}{9}$ recti; vel Gra: $\frac{5 \times 60}{270}$.

Rurſus anguli ſolidi Dodacaëdri, quem tres anguli pentagoni ordinata includunt (nempe $3 \times \frac{6}{5}$ recti; vel Gra: 3×108) quantitas eſt $\frac{6}{5}$ recti; vel Gra: $\frac{3 \times 108}{270}$.

Conſect. Atque hoc modo invenientur menſuræ omnium quinque corporum regularium: Nempe Tetraëdri(4), $\frac{2}{3}$ recti, vel $\frac{180}{270}$. Hexaëdri (6), 1 rectum, vel $\frac{270}{270}$. Octaëdri (8), $\frac{8}{9}$ recti vel $\frac{240}{220}$. Icoſaëdri (20), $\frac{10}{9}$ recti, vel $\frac{300}{270}$. Dodecaëdri (12), $\frac{6}{5}$ recti, vel $\frac{324}{270}$. Atque hi ſunt ipſorum characteres.

8. Octo anguli recti ſolidi complent locum ſolidum. Quare ſi angulus ſolidus ſit aliquota pars octo rectorum, vel Gra: $\frac{2160}{270}$: angulus ille ſolidus toties ſumptus complebit locum ſolidum. Nempe anguli Tetraëdri 12: Hexaëdri 8: Octaëdri 9. Nam $\frac{2}{3}$)8(12. Et $\frac{8}{9}$)8(9.

9. Numerus angulorum planorum in ſolido quovis regulari, invenitur multiplicando numerum angulorum planorum unius baſis in numerum baſium. Nempe anguli plani ſunt, in (4), 3×4: in (6), 4×6:

in

in (8), 3×8 : in (20), 3×20 : in (12), 5×12.

10. Numerus angulorum solidorum in solido quovis regulari, invenitur dividendo numerum angulorum planorum in solido illo, per numerum angulorum planorum circa unum angulum solidum. Nempe anguli solidi sunt, in (4), $\frac{3 \times 4}{3}$: in (6), $\frac{4 \times 6}{3}$, in (8) $\frac{3 \times 8}{4}$: in (20), $\frac{3 \times 20}{5}$: in (12), $\frac{5 \times 12}{3}$.

11. Numerus linearum lateralium in solido quovis regulari, est semis numeri angulorum planorum in illo solido. Atque hic etiam est numerus rectangulorum, sub latere, & lineâ perpendiculari è centro basis in latus. Nam unaquæque linea lateralis duobus inservit angulis.

12. Quare rectangulum sub latere, & linea perpendiculari è centro basis in latus, est superficiei totius, in (4), $\frac{1}{6}$: in (6) & (8), $\frac{1}{12}$: in (20) & (12), $\frac{1}{30}$. Est 6 & 7 e 14.

13. Solidum quodque regulare æquale est superficiei suæ trienti ducto in lineam perpendicularem è centro suo in basem.

14. Si linea ς secetur secundum extremam & mediam rationem, ut σ sit majus segmentum, & τ minus: Dico $\sigma q = \varsigma\tau = \sigma\tau + \tau q$. per 11 & 3 e 2.

15. $Q{:}\frac{1}{2}\varsigma + \sigma{:} = 5Q{:}\frac{1}{2}\varsigma$. Nempe $\frac{1}{4}\varsigma q + \varsigma\sigma + (\sigma q) \sigma$ Est 1 & 2 e 13.

16. $Q{:}\frac{1}{2}\sigma + \tau{:} = 5Q{:}\frac{1}{2}\sigma$. Nempe $\frac{1}{4}\sigma q + (\sigma\tau + \tau q)$ $\varsigma\tau$. Est 3 e 13.

Quare

Quare $\sigma.\tau::\tau.\sigma-\tau$.

17. $\varsigma q+\tau q=3\sigma q$. Nempe $\sigma q+(2\sigma\tau+\tau q+\tau q)2\varsigma\tau$. Est 4 e 13.

18. $\varsigma+\tau.\varsigma::\varsigma.\sigma$. Nempe $\varsigma+\sigma.\varsigma::\sigma+\tau.\sigma$. Est 5 e 13.

19. Si ς sit ϰ, τ erit *Apotome*. Nam quia per 15, $\frac{1}{2}\varsigma+\sigma.\frac{1}{2}\varsigma::\sqrt{q}5.1$: Erunt $\sigma+\frac{1}{2}\varsigma, \frac{1}{2}\varsigma$ ϰ ꟻ, per def: 6 e 10. Et per 37 e 10, erit $\sigma+\frac{1}{2}\varsigma+\frac{1}{2}\varsigma$ *Binomium*. Ergo per 74 e 10, $\sigma+\frac{1}{2}\varsigma-\frac{1}{2}\varsigma$ *Apotome*, hoc est σ.

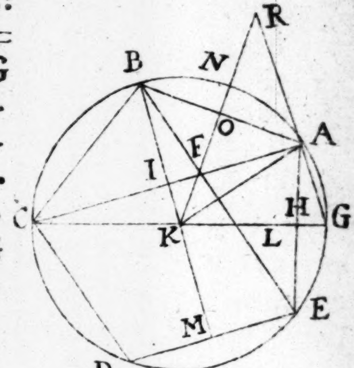
Item si ς sit ϰ, τ erit *Apotome*. Nam per 61 & 98 e 10, $\frac{\sigma q}{\varsigma}$ ϰ (hoc est τ) *Apotome*. vide 14. Est 6 e 13.

20. Si. ς sit subtendens angulum pentagoni ordinarii; erit σ latus pentagoni. Dico in Schemate, AC. CF::CF.AF : Et CF = CB = AB. Nam quia trianguli BCF, omnes tres ang = 10 recti : è quibus ang: BCF = $\frac{2}{5}$ recti; & ang: CBF = $\frac{4}{5}$ recti: tertius igitur ang: CFB = $\frac{4}{5}$ recti: quare CF = CB = AB. Et quia liquet tri: ACB, BAF sim: Erit AC.AB :: AB.AF: Ergo. Est 8 e 13.

Consect. Et si ex angulo B per centrum, ad oppositum latus pentagoni, ducatur BKM, secans ipsam AC in I: secabitur etiam linea BM secundum extremam & mediam rationem in puncto I. Nam quia in tri: EBM, lateri EM parallela est FI: erit per 2 e 6, IM IB :: FE. BF :: CF. FA. Ergo.

21. Si circuli alicujus radius sit σ, erit τ latus decagoni. Nam quia arcus ABC = 2GAN, erit ang: RKG = KGA = KAG : ideoque tri: RGK, KAG sim.

sim. Estque RG. KG:: KG.AG. Atque AR $=$ KG, quia ang: $\frac{1}{2}$ RKG $=$KRG. Secatur igitur RG secundum mediam & extremam rationem in puncto A. Ergo latus decagoni AG est minus segmentum. Est 9 e 13. Quare etiam si 5 sit Radius, erit σ latus decagoni.



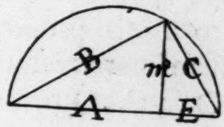
22. Perpendicularis KH vel KO, a centro in latus pentagoni ordinati, æquatur semisummæ Radii & lateris decagoni, Nempe KO$=\frac{1}{2}$RG$=\frac{1}{2}$KR. Nam quia KR$=$RG; sublato utrinque radio, manebit RN$=$AG. Estque KO$=$RO, per 2 e 3. Est 1 e 14.

23. Quadratum lateris pentagoni ordinati, minus quadrato Radii, æquatur quadrato lateris decagoni: Nempe AEq-KGq$=$AGq. Nam quia AHq+GHq $=$AGq: Et quia KG secatur med: & extr: ratione in L; estque KL$=$AG: Erit AEq+GLq$=$4AGq: Et per 17, KGq+GLq$=$3AGq. Fiat subductio. Est 10 e 13.

24. Quadratum lateris pentagoni, plus quadrato lineæ subtendentis angulum pentagoni, æquatur quinque quadratis Radii. Nempe in schemate præcedente AEq+CAq$=$5KGq. Nam CAq+AGq$=$4KGq: & per 23, AEq-AGq$=$KGq. Fiat additio. Est hæc 3 e 14.

25. Si

25. Si circuli Radius sit rationalis, latus pentagoni inscripti erit irrationale, Nempe Minor. Nam quia triang: rect: AIC, AKF sim: erit CI. $\frac{1}{2}$AC :: KF. $\frac{1}{2}$AF: ideoque 2CI. CK :: KF. $\frac{1}{4}$AF = FL, qui quadrans est Radii: Et CD+CK. CK :: KL. FL. At per 2c, si CD sit σ, CK erit $\frac{1}{2}$s: quare si FK sit σ, FL erit $\frac{1}{4}$s: & per 15, KLq = 5FLq. Est autem BLq = 25FLq: quare BL. KL :: √q25. √q5, ⊬ ⊐, per def: 6 e 10: Et sic ipsorum quadrata: unde etiam BLq. BLq−KLq :: 25. (25−5) 20 :: 5. 4: Et BL. √u: BLq−KLq :: √q5. 2, ⊓. Quare BL−KL, nempe BK est ⊬ *Apotome* IV, per def: & 47 e 10: quippe ostensum est, A, E ⊬ ⊐; A ⊓ √X; & A ⊓ R. Item BCq = BKq+CKq = BKq+BK×BH (per 35 e 3) = ⊬BK× ⊬BH. Ergo per 95 e 10, BC est ⊬ *Apot.* IV, hoc est Minor. Est 11 e 13.



26. In triang. rect. cujus Hypotenusa Z dividitur in segmenta A, E, perpendiculari ex angulo recto demisso, Erit I°, ZA = Bq: & ZE = Cq: & AE = mq.

II°, A.E :: Aq.mq :: mq.Eq :: Bq.Cq
III°, Z.A :: Zq.Bq :: Bq.Aq :: Cq.mq
IV°, Z.E :: Zq.Cq :: Cq.Eq :: Bq.mq

27. Si triangulum æquilaterum inscribatur circulo: 1° perpendicularis è centro in latus æquatur $\frac{1}{2}$ Radii. Ideoque altitudo Δ^i, sive perpendicularis è vertice in basem æquatur $\frac{3}{2}$ Radii. 2°, Q:dia. Q:lat: Δ^i::4.3: ideoque Q:Rad.Q:lat:Δ^i::1.3. Est 12 e 13.

3°, Q:lat.Q:alt: Δ::4.3. sc: 3.$\frac{9}{4}$. Est 12 e 14.

4°, Area trianguli æquilateri $\sqrt{\frac{27}{16}}$, æquatur quadrato mediæ proportionalis inter altitudinem & semissem lateris: vel inter latus & $\frac{1}{2}$ altitud. Est 29 e 14.

5°. Q:lat:Δ^i.Q:perpend:è cent:in bas::3.$\frac{1}{4}$ est. 18 e 14

28. Si quadratum inscribatur circulo: latus ipsius erit $\sqrt{2}$: Et Q:lat:$\square^i$. Q:dia::1.2.

29. Si eidem circulo inscribatur tum, triangulum æquilaterum, tum quadratum: 1°, Q: lat:Δ^i.Q:lat: $\square^i$::3.2: per 27 2°, & 28. Est 16 e 14.

2°, Q:alt:Δ^i. Q:lat:$\square^i$::9.8: per 27 3°, & 29 1°.

3°, Δ.$\square$::$\sqrt{27}$.8: scil: $\sqrt{\frac{27}{16}}$.$\sqrt{4}$.

30. Latera quinque solidorum regularium exponere, & inter se comparare. Est 13,14,15,16,17,18, e 13. Esto AB vel ipsi perpendicularis Aβ, axis sphæræ, & C centrum: ducatur Cβ secans circulum sphæræ in H; ducaturque HG parallela ipsi Aβ: eritque GH$=$2CG; & per 47 e 1, Rq$=$5Q:$\frac{1}{2}$HG; & per 15, si HG sit s, AG est σ; & per 21, si HG sit Radius, erit AG latus decagoni; & per 23, AH latus pentagoni.

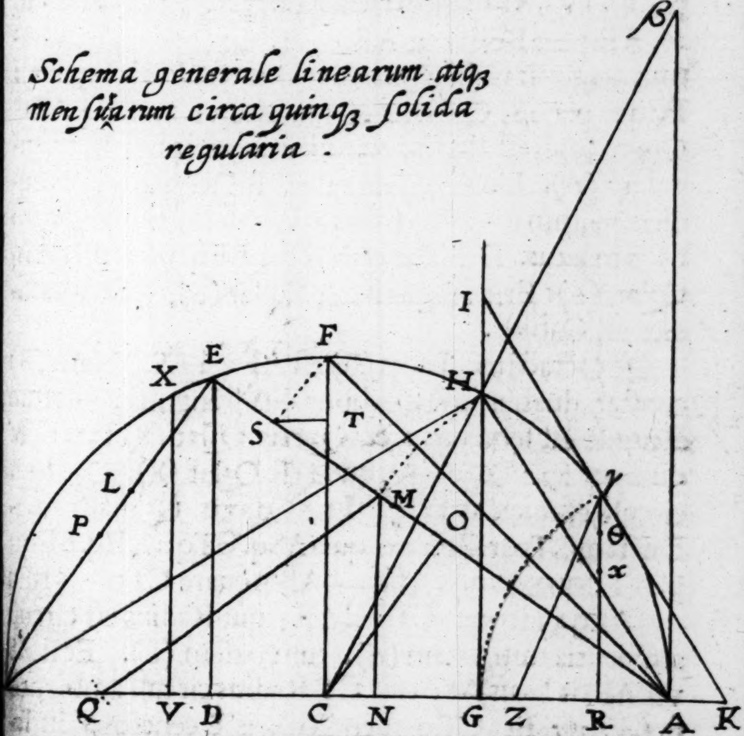
Mensuretur CV$=$CG; & VX$=$GH. Et è centro erigatur CF; jungaturque AF. tum dividatur axis AB trifariam, sic ut BD sit $\frac{1}{3}$, & AD $\frac{2}{3}$: ducanturque

per-

perpendicularis DE, & chordæ AE, BE. Secetur BE med: et extr: ratione in puncto L.

Statuaturque GI$=$BE; & IK ipsi AH parallela: Et sic erit GK$=$BL segmentum majus.

Schema generale linearum atq; mensurarum circa quinq; solida regularia.



His diligenter memoriæ mandatis, ad ipsa quinque corpora regularia declaranda pergemus.

De Tetraëdro. Latus (4) est AE; & DE Radius circuli ambientis basem ipsius triangulam. Nam per 16 IV°, AEq. DEq::AB.BD::3.1::Q:lat: Δl. Q:

Rad: per 27 2°. Et CD & perpendicularis è centro sphæræ in basem, scil: $\frac{1}{6}$ axis. Et $\frac{1}{2}$ DE est perpendicularis è centro basis in latus, per 27 1°.

De Hexaëdro. Latus (6) Est BE vel GI. Nam per 26 IV°, ABq.BEq::AB.BD::3.1. Et quia per 26 1°, AEq=2BEq: erit ABq=3BEq (hoc est quadratum diagonii Cubi æquatur tribus quadratis lateris): Estque per 28, Q: lat:□^{i}.Q:dia circ::1.2::BEq.AEq. Quare $\frac{1}{2}$ AE est Radius circuli ambientis basem triangulam (6). Liquet etiam quod $\frac{1}{2}$BE æquatur perpendiculari, tum è centro sphæræ in basem, tum è centro basis in latus. Denique quia ABq.BEq::6.2::Q:axis. Q:lat:(6): Erit 2Q: axis=6Q: lat (6); quæ superficies est Cubica.

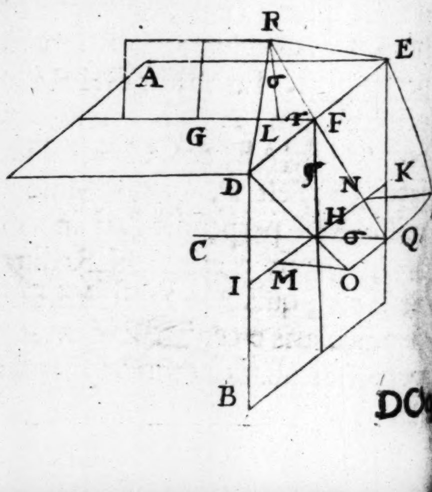
De Octaëdro. Latus (8) est AF vel AS. Nam (8) constat duabus pyramidibus quadrangulis, quarum altitudo est semiaxis: & Q:axis.Q:lat (8) ::2.1. & quia per 27 2°, Q:lat△^{i}, quod est Q:lat (8). Q:diam: circuli ambientis::3.4: Erit Q: axis. Q: diam::3.2. Ductaq; ST parallela axi, quia ASq.CTq::ABq.BEq:: 3.1: Estque ASq=AFq=$\frac{2}{3}$ABq: quare CTq=$\frac{2}{3}$BEq =$\frac{1}{3}$AEq: ideoque CT=$\frac{1}{2}$AE; qui Radius est circuli ambientis tum basem (6), tum basem (8). Et si AS vel AF sit latus △^{i}, erit CT Radius circuli ambientis per 27 2°. Et $\frac{1}{2}$CT perpendicularis è centro △^{i} in latus, per 27 1°. Est autem superficies (6)=12 BE×$\frac{1}{2}$BE; & superficies (8)=12AF×$\frac{1}{2}$CT, quod satis liquet. Quare BE×$\frac{1}{2}$BE. AF×$\frac{1}{2}$CT::superf: (6).superf: (8):: (6).(8)::BE.AC. Est 27 e 14. Quoniam AFq.ACq:: BEq.CTq=$\frac{2}{3}$BEq.

De Icosaëdro. Latus)20) est AH vel AM. Nam Radiis GH & VX æqualibus cogitentur duo circuli describi, perpendiculariter insistentes plano AHXB; atque in ipsis includi, tum pentagonum ordinatum lateris AH, tum decagonum lateris AG : sic ut punctum H sit angulus pentagoni, & X decagoni : unde anguli pentagoni in uno circulo perpendiculariter imminebunt angulis decagoni in altero, ad distantiam GV=GH. Et è singulis angulis unius pentagoni ducantur duæ hypotenusæ ad angulos alterius utrinque proximos : Item ex singulis angulis utriusque pentagoni, in proximum axis terminum A vel B, ducantur hypotenusæ : Quæ quidem omnes, hypotenusæ erunt triangulorum rectangulorum, quorum Cathetus æqualis est Radio GH, & basis lateri decagoni AG ; ideoque singulæ æquales lateri pentagoni AH. Quare descripta erit figura constans 20 triangulis æquilateris & æqualibus. Includi autem angulos illos omnes sphæra, patet ex angulo H : nam circumvolutus semicirculus AHXB reliquos similiter angulos perstringet. Est igitur GH Radius circuli ambientis pentagonum (20); & ɤ quia 5.1::CHq.GHq:est autem CH=$\frac{1}{2}$AB, & CG=$\frac{1}{2}$GH : Atque idcirco AH latus (20) est ɤ, nempe Minor, per 25. Tum demissa MN perpendiculari in axem, statuatur MQ =AC,$\frac{1}{2}$ axis : erit MN Radius circuli circa basem, per 27 2°; quia AM.MN::AE.DE::3.1: Et $\frac{1}{2}$ MN perpendicularis è centro basis in latus, per 27 1°: Et NQ perpendicularis è centro sphæræ in basem; quia ibi Q

 est

est instar centri sphæræ. Denique BEq. GHq::5.3: Nam BEq. ABq::1.3: & ABq. GHq::CHq. CGq:: 5.1.

De Dodecaëdro. Latus (12) est BL vel GK, in præcedente schemate: & BE vel GI (latus (6)) subtendit angulum basis pentagonæ (12). Nam in sequente schemate, describantur duæ bases (6), AD EB, quarum commune latus est DE; & centrum sphæræ C; & centrum basis unius G, alterius H. A centro G ducatur GF perpendicularis lateri DE; & per centrum H ducatur IHK ipsi DE parallela. Erunt igitur GF, HI, HK, semisses lateris (6): secentur singulæ in $\sigma\tau$ punctis L, M, N; ut majus segmentum sit ubique centro proximum: & in punctis L, M, N, erigantur tres perpendiculares LR, MO, NP, æquales ipsi majori segmento: & ducatur OP, latus (12): est enim IK.OP::$\varsigma.\sigma$::BE.BL, schematis præcedentis. Ducantur etiam DO, DR, EP, ER, quæ cum OP includunt pentagonum, basem quidem (12). Nam



1°. Pentagonum DOPER est in uno plano: Est enim RFQ una recta linea, per 32 e 6.

2°, Est æquilaterum: est enim

DO

DOq = MOq pl. DIq+IMq, hoc eſt, 3MOq, per 17. At etiam 4MOq = OPq. Et ſic de cæteris.

3°, Eſt æquiangulum. Eſt enim DPq = DIq pl. INq+NPq, hoc eſt, 3DIq, per 18 & 17. At etiam 4DIq = DEq. Et ſic de cæteris.

4°, Circumſcribitur ſphæra: Eſt enim CPq = CQq+QPq, hoc eſt, 3CHq, per 18 & 17. at Q:axis. Q:lat(6)::3.1::Q:$\frac{1}{2}$axis. Q:$\frac{1}{2}$ lat(6). Et ſic de reliquis.

5°, Circa (6) deſcribentur 12 ejuſmodi pentagona: Cum enim per II, ſint in (6) latera 12; unicuique lateri ſuum adhærebit pentagonum; ſicut intuenti perſpicuum erit.

6°, Latus (12) eſt Apotome: Eſt enim DE latus (6) ϰ⌐ ⊐ axi: at per 19, ſi ς (DE) ſit ϰ⌐, σ (OP) erit Apotome.

His ſic oſtenſis, ad prius illud ſchema redeundum denuò erit: In quo menſuretur Kγ = KG = BL lateri (12): & demittatur γR. Erit per 23, γR Radius circuli circa baſem pentagonam: Et per 22, Rθ, ſcil: $\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK, eſt perpendicularis è centro baſis in latus. Eſt autem Rγ = MN: Nam quia (3BEq) 3GIq = Q:axis = 5GHq: erit 5.3::GIq. GHq :: GKq. GAq:: GIq+GKQ. GHq+GAq: hoc eſt, per 20 & 24: 5Rγq. AMq = 3MNq, per 26 IV°. Quare 3×5Rγq = 5×3MNq. Eſtque QN perpendicularis à centro ſphæræ in baſem. Eſtque ſuperficies (20) = 30 AH×$\frac{1}{2}$MN: & ſuperficies (12) = 30GK×Rθ, quod ſatis conſtat. Quare AH×$\frac{1}{2}$MN. GK×Rθ:: ſuperf (20). ſuperf (12):: (20).(12).

26. Si axis sphæræ æqualis sit, tum √u: ςq+τq unius lineæ, tum √u:ςq+τq alterius lineæ: erit σ latus (20); & τ latus (12). Nam in Schema priore generali, ς.σ:: GH.AG::BH.AH: At ABq=BHq+AHq. Item ABq=3BEq=Q:BE+BL: pl BLq: hoc est, 3ςq=Q:ς+τ:pl σq. Est enim σq=ςτ. Est 23 e 14.

27. √u:ςq+σq. √u:ςq+τq::lat (6). lat (20) hoc est, Kγ. Zγ :: BE.AH, vel GI. AM: secta scil: KZ=Rγ med: & extr: ratione in puncto R. Nam per 26 IV°, AMq=3Rγq: Et per 17, Zγq=3RKq. Quare AM. Zγ::Rγ. RK::ς.σ::GI. KG. Est 10 e 14.

38. Latus (6). Latus (20)::superf (12). superf (20). hoc est GI. AM:: KG×Rϑ. AM×$\frac{1}{2}$Rγ. Nam KG×Rϑ=GI×$\frac{1}{3}$Rγ. Est enim GI.KG::ς.σ::Rγ+RK. Rγ::($\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{3}$RK) Rϑ. $\frac{1}{3}$Rγ, per 18. Est 9 e 14.

39. Q:perpendic: è centro sphæræ in basem (4). Q:perpend: è centro sphæræ in basem (8) :: 1.3:: CDq.$\frac{1}{4}$BEq.

40. Q: lat (4). Q: lat (8)::Basis (4). Basis (8). Nam AEq.ABq::2.3: Et ABq.AFq::4.2. Est 14 e 14. Hinc consectarium est,

Quod, Superf (4).superf (8)::2.3:scil:4×4.8×3.

41. Q: (4). Q: (8) :: 4.27: per 39 & consect:40: Nempe $\times\begin{Bmatrix}1.\ 3\\2.\ 9\end{Bmatrix}$. Est 17 e 14.

42. Basis (6). Basis (8)::8.√27: Nempe $\frac{4}{9}$.√$\frac{3}{4}$.

43. Basis (4). Basis (6)::√3.2::altit: Δⁱ(4).latu Δⁱ(4): nempe $\frac{1}{2}$ BE. AE. Est 30 e 14.

44. Superf (4). Superf (6) ::1.√3 : Nempe

√$\frac{1}{3}$

$\sqrt{\frac{4}{3}}\times 4.8$: hoc est, Δ^m (4) $\times$ 4.2Q: axis.

45. Tria (4) = (6): per 44 & 39: Nempe $\times \left\{ \begin{matrix} 1.\sqrt{3} \\ 1.\sqrt{3} \end{matrix} \right\}$ est 32 e 14. Hinc consectarium est,

Quod $\left\{ \begin{array}{l} \text{Prisma basis \& altitudinis (4) = (6). Et} \\ \text{Pyramis basis \& altitudinis (6) = (4).} \end{array} \right.$

46. (8). 3 (4) :: latus (8). latus (4): Nempe 2. $(\sqrt{\frac{16}{27}}\times 3)\ \sqrt{\frac{16}{3}} :: \sqrt{2}.\sqrt{\frac{8}{3}}$. Est 22 e 14.

47. Si latus (8) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (20) = $\sqrt{2}\tau q$. Nam BH+HA secatur med: & extr: ratione in H: Estque $2\sigma q + 2\tau q$ = 2AFq = ABq = BHq+AHq. Ergo AHq = $2\tau q$. Est 24 e 14.

48. Si latus (8) = $\sqrt{u}$: $\frac{1}{2}\sigma q + \frac{1}{2}\tau q$, Erit latus (12) = τ. Nam GI+GH secatur med: & extre: ratione in G: Estque $\sigma q + \tau q$ = 2AFq = ABq = 3GIq = Q: GI+GK: +GKq. Ergo GKq = τq. Est hæc 25 e 14.

49. Si latus (4) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (20) = $\sqrt{\frac{1}{2}}\tau q$. Nam BH+HA secatur media & extr: ratione in H : & $\frac{1}{2}\sigma q + \frac{1}{2}\tau q = \frac{1}{2}$AEq = ABq = BHq +AHq. Ergo AHq = $\frac{1}{2}\tau q$. Est hæc 26 e 14.

50. Si latus (6) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (20) = $\sqrt{3}\tau q$. Nam BH+AH secatur med: & extr: ratione in H : & $3\sigma q + 3\tau q$ = 3GIq = ABq = BHq+AHq. Ergo AHq = $3\tau q$

51. Si latus (6) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (12) = $\sqrt{3}\tau q$. Nam GI+GK secatur med : & extrem : ratione in H : & $3\sigma q + \sigma q$ = 3GIq = Q: GI+GK: + GKq. Ergo GKq = $3\tau q$.

52. Si axis sphæræ sit $\frac{1}{2}r$, superficies tum (4),

tum

tum (8), erit mr. Nam quia 3.2::Q:axis. AEq:erit Q:lat:(4)=$\frac{1}{3}$Q:axis: est etiam Q:lat:(8)=$\frac{2}{3}$Q:axis: scil: utrumque ır: quare & ipsorum latera sunt ır. At in Δ°, per 27,3°, Latus. altitud::2.$\sqrt{}$3, ır .ergo per 22 e 10, area Δ^{i} est mr. Est 13 e 14.

Notandum autem, quod in his quæ tum de elemento X, tum de V corporibus regular: scripta sunt, propositionum numerus est juxta Ch: Clau.

Corporum

Corporum quinque regularium menſuræ, ad axem ſphæræ 2. Conſulatur Schema generale.

I. *In Tetraëdro.*

AE latus (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{3}}$: 1,632932.

DE ſemidiameter circuli ambientis baſem triangulam (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{9}}$: 0,942809.

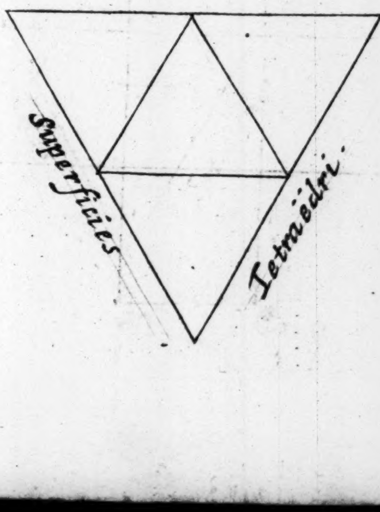
Altitudo baſis, eſt 1,414213.

Area baſis (4), eſt 1,154657.

Superficies (4), eſt 4,618628.

CD perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (4), eſt $\frac{1}{3}$, 0,333333.

Soliditas (4), eſt 0,513216.



II.

II. *In Hexaëdro.*

BE latus (6), est $\sqrt{\frac{4}{3}}$; 1,154700.

CT est semidiameter circu'i ambientis basem quadrangulam (6), $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0,816490.

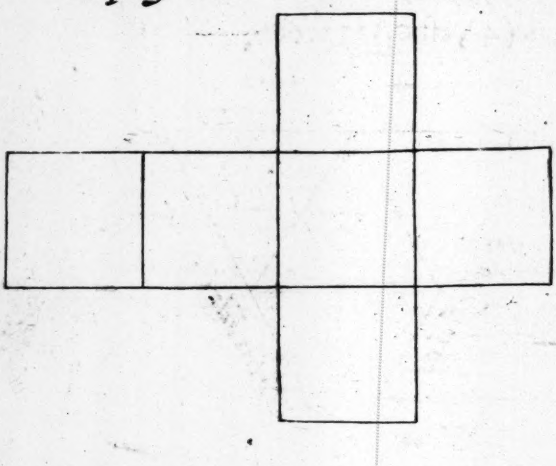
Area basis (6), est $\frac{4}{3}$: 1,333333.

Superficies (6), est 8: Nempe bina quadrata axis, sphæræ.

$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro sphæræ in basem (6) est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0,577175.

Soliditas (6), est 1,539600.

Superficies Hexaëdri.



III. *In Octaëdro.*

AF latus (8), est $\sqrt{2}$: 1,414213.

CT est semidiameter circuli ambientis basem triangulam (8), est $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0,816490.

Altitudo basis (8), est 1,224735.

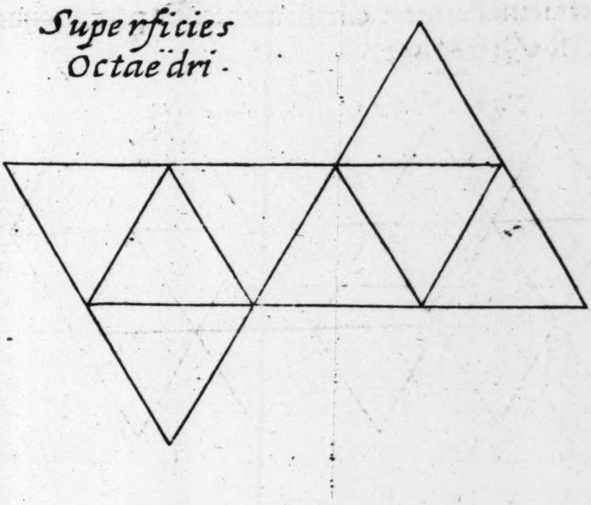
Area basis (8), est 0,866018.

Superficies (8), est 6,928144.

BE perpendicularis è centro sphæræ in basem (8), est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0,577175.

Soliditas (8), est 1,333333.

Superficies Octaëdri.



IV. *In Icosaëdro.*

AH latus (20), est $\sqrt{u}$: $2-\sqrt{\frac{4}{5}}$: 1|105573.

MN = Rγ semidiameter circuli ambientis basem triangulam (20), est $\sqrt{u}$: $\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0|607062.

Altitudo basis (20), est 0|910593.

Area basis (20), est 0|503362.

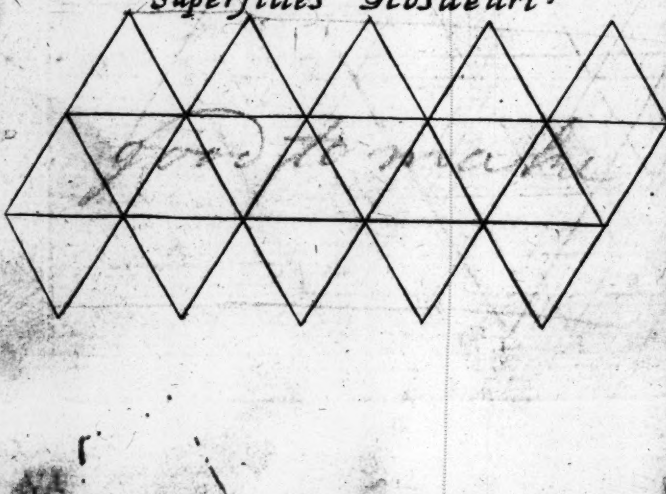
Superficies (20), est 10|067240.

QN perpendicularis è centro sphæræ in basem (20) est $\sqrt{u}$: $\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0|794654.

Soliditas (20), est 2|666658.

GH est semidiameter circuli ambientis pentagonum (20), est $\sqrt{\frac{4}{5}}$: 0|894427.

Superficies Icosaëdri.



V. *In Dodecaëdro.*

GK = BL latus (12), est $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$: 0,713642.

$R\gamma$ = MN ſemidiameter circuli ambientis baſem quinquangulam (12), est $\sqrt{u:\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0,607062.

$R\vartheta = \frac{1}{2}R\gamma + \frac{1}{2}RK$, perpendicularis è centro baſis in latus, eſt 0 49112.

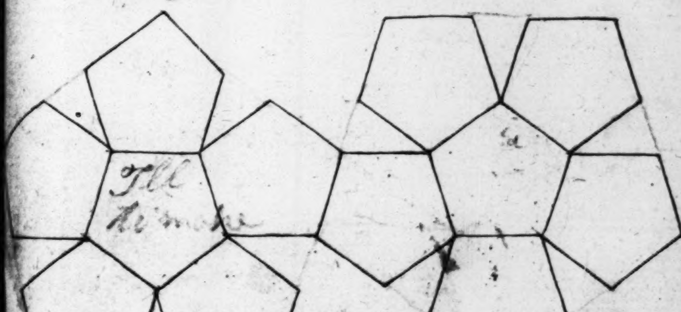
Area baſis (12), eſt 0,876211.

Superficies (12), eſt 10,514532.

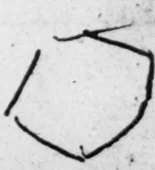
QN perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (12), eſt $\sqrt{u:\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0,794654.

Soliditas (12) eſt 2,785137.

Superficies Dodecaëdri.



FINIS.



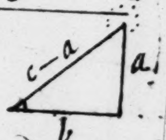
Pa:	lin:	Errata correcta	Pa:	lin:	Errata correcta.
2	15	fieret	31	10	quadratum
	14	1	32	2	differentiæ
	26	Millesimæ	33	ult	$X = \frac{RqEq - SqEq}{Sq}$
3	3	decimas	34	7	$\frac{Aqq + Æq}{Aq}$
	7	millesimas			
	29	per quam			$\frac{Aqq - Æq}{Aq}$
4	1	quam			
6	8	E.x. A	36	ult.	6561
	4	E.x. AA	41	8	57
9	7	8708,6568 647 57 4 32260	42	a.p.	ad ipsas
			45	ult.	883535803
			47	9	A·E :: R·S
			57	24	$\frac{1}{2}$ Z
11	10	$\frac{12}{4}$		26	$\frac{1}{4}$ Z
14	10	1307,85	60	1	Regula prima non succedit
	ult.	91707			
15	ult.	BA·CB CA·CC	63	17	quad.cubicum
18	16	summæ	64	11	Aqq − Eqq
19	5	137638	65	16	hujusmodi
	6	91708	68	3	$\frac{1}{2}$ Zq + $\frac{1}{2}$ Xq.
20	22	7.84722		23	et X
	25	Intueri		27	= Z − ZÆ
	ult.	6 x 60	69	26	parte. duobus
28	13	5 · $\frac{152}{144}$ 8	70	11	æqualibus
			72	7	= AD
29	9	13		10	= ED
	pen.	$\frac{A}{B}$)	80	3	Bq · mi.

Pa:	lin.	Errata corrícta	Pa.	lin.	Errata correcta
80	5.6	Bq. min.	97	8	~~coradibus~~ $\frac{ABq}{4} - \frac{CXS}{R}$
	7	2 Z Bq etc.		17	$\sqrt{q}.\ \frac{C}{R}$
81	VIII	$TX - X + 2\alpha T = 2Z$	98	2	$HS = \sqrt{u}:\ \frac{ABq}{4} - \frac{CXS}{R}$
	10	$\frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T}$	99	2	ER=
	11	$+ \alpha q - X\alpha$	101	11	tota
	12	$+ \frac{2Z}{X}$	102	12	Zq + Z in
	17	$\frac{1}{2}X$ Plus minus $\sqrt{u}:\ \frac{1}{4}Xq$ $+ \omega q + X\omega - 2ZX = \alpha$	108	23	$\pm \frac{1}{2}$ BA
			109	1	propositionibus
			111	9	:: $\overline{Radq}$
	18	Plus minus $\sqrt{u}$:	111	13	OA − 5 Radq
				18	Septisectione
	20	$\frac{2Z}{2T}$		20	− OAqqC
86	10	æqualis			
96	17	similis sit			
		similis sit			

Datis trianguli plani rectanguli C summa laterum, et B basi invenire tum cathetum, tum hypotenusam

B C c

Puta factum quod postulabatur sitque a cathetus erit $c-a$ hypotenusa et



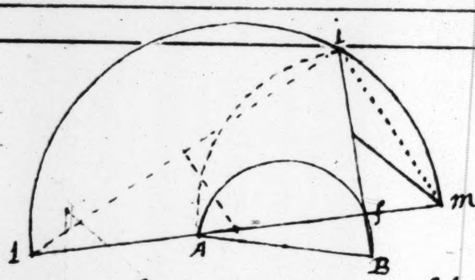
$cc-2ca+aa \propto bb+aa$ et demptis utrinque aa erit $cc-2ca \propto bb$, vel $2ca \propto cc-bb$ et $2c \cdot \overline{c-b} \div a \div$ g° $\frac{cc-bb}{2c} \propto a$.

Aliter

sit a hypotenusa, erit $c-a$ basis et $aa \propto cc-2ca+aa+bb$, et demptis utrinque aa $2ca \propto cc+bb$ et $\frac{cc+bb}{2c} \propto a$.

Verbis sic. Quadratum summæ laterum minutum quadrato basis, et per duplam laterum summam divisum exhibebit cathetum. auctum vero quadrato basis et per duplam laterum summam divisum exhibebit hypotenusam.

Geometrice sic. Diametro $AD \propto c$ describatur semicirculus, cui inscribatur B! continuata infinite, et sit $Bf \propto b$ erit Af cui æquatur fi $\sqrt{q}.\, c-b$ conti=



nuitur fA in l ita ut fl sit æqualis 2c inter quam ut prima, et fi ut secunda inveniatur fm tertia quæ æquabitur catheto quæsito, et observantur singula canonis algebrici partes nam fiq x fAq x cc−bb dividitur per fl x 2c et fit fm quotiens geometricus, et ex basi, et catheto cognitis compleat triangulum.

Demonstratio

lf. fi. fm sunt continue proportionales p 8. elem. 6ti Eucl. ergo $\frac{fiq}{lf}$ æqualis fm per 4t. cap. 6ti huius

Problema 2dum. Data media trium quantitatum continue proportionaliu cum dria extremarum invenire reliquas. Est prima Billij.

b

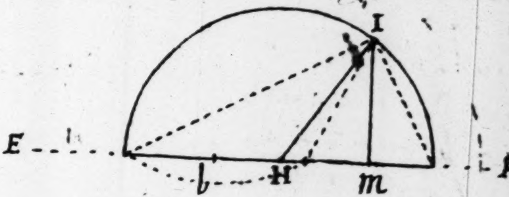
c

Dantur c media, et b dria extremaru sit a minor extrema, erit b+a altera extrema, et b+a in a hoc est aa+ba x cc Ergo Vu: $\frac{1}{4}$ bb+cc: $-$ $\frac{1}{2}$ b. x a.

Potest hoc problema sic aliter proponi. In triangulo rectangulo datis perpendiculo et dña segmentorum hyp. invenire triangulum.

Geometricè sic perficitur. Super infinitâ EF erigatur ad rectos MI æqualis mediæ datæ, et mensuretur mh æqualis $\frac{1}{2}b$ erit hi $\sqrt{u}: \frac{1}{4}bb+cc:$ super hac ut diametro scribatur semicirculus, et observatur canon algebricus nam E,m est $\sqrt{u}: \frac{1}{4}bb+cc: + \frac{1}{2}b$, et mF est $\sqrt{u}: \frac{1}{4}bb+cc: - \frac{1}{2}b$.

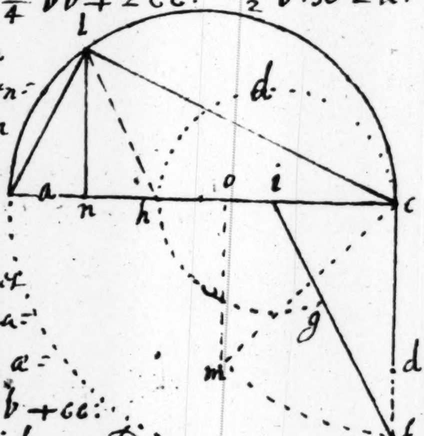
Demonstratio. Em. mI. mF sunt ÷ propter similitudinem triangg. ℓ 4. cap. 6ti.



Problema 3um. Data media trium quantitatum ÷ a. c. d cum b. dña qua major reliquarum excedit duplum minoris invenire reliquas est Probl. 8vu Oughtr. pag. 64 alijs verbis propositum.

Puta factum quod requiritur. Sitq a minor extrema, erit $b+2a$ major et $ba+2aa \infty cc$ vel $2aa \infty cc - ba$. Ergo $\sqrt{u}: \frac{1}{4} bb + 2cc : \pm \frac{1}{2} b \infty 2a$: sci. duplo minoris termini. vel aliter $aa \infty \frac{cc - ba}{2}$ et $\sqrt{u}: \frac{1}{16} bb + cc : \pm \frac{1}{4} b \infty a$

Geometrice ex praevio Canone. $\sqrt{u}: \frac{1}{4} bb + 2cc : - \frac{1}{2} b \infty 2a$.



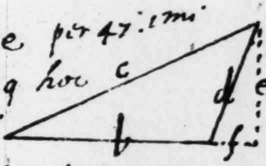
Ad punctum c recta bc mensuratur co, om aequal. c datae erit cm aequalis $rq\ 2cc$ cui aequatur fc, et factâ ci aequali $\frac{1}{2} b$ erit if aequalis $\sqrt{u}: \frac{1}{4} bb + cc :$ cui aequatur ib. subduc ih aequal. $\frac{1}{2} b$ erit $bh \infty 2a$, et $hc \infty d$, super bc igitur diametro describatur semicirculus blc aptetur $bl \infty c$ et dividatur bh bifariam in n. erit b,l media, b,a minor, et bc major extrema trium quantt. $\div\!\div$ nam triangula bln, blc sunt similia gōn

cb, bl, bm sunt ÷÷ et observatur praescriptum Canonis.

Aliter

Sit a. major extrema erit $\frac{a-d}{2}$ minor. nam bh est $a-d$. cujus semissis est $\frac{a-d}{2}$ et $\frac{aa-da}{2} \propto cc$, et per interpretationem $aa \propto 2cc + da$. Unde $\sqrt{u}: \frac{1}{4}dd + 2cc: + \frac{1}{2}d \propto a$. et effectio priori non erit absimilis

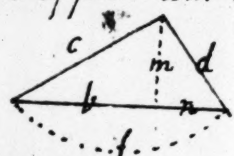
Theor. pr. 1. Inventio 12 Elementi 2di. hic pag. 77 Prob. 2. 10 pr: 12. Rami. nempe comparatio basis obtusanguli cum lateribus



Primo $dd - ff \propto ee$ per 47. 1mi sed $ee \propto cc - b + f\,q$ hoc est $bb - 2bf + ff$ per 4ta 2di. Ergo ee vel huic aequalis $dd - ff \propto cc - bb - 2bf - ff$. et sublatis utrinque ff $dd \propto cc - bb - 2bf$, hoc est $cc \propto dd + bb + 2bf$

Ergo. Si basis trianguli subtendit obtusangulum plus potest cruribus duplici rectangulo alterius, et ex eo continuationis ad verticis perpendicularem. $cc \propto dd + bb + 2bf$.

Theor. 2dum. Inventio 13 elem. 2di hic pag. 78 nempe comparatio basis acutanguli cū lateribus. nota in triangulo proposito d basis subtendit angulum oppositum acutum.



$cc - bb \propto mm.$

$dd - nn \propto mm$

$nn \propto ff - \overline{2bn + bb}$ per 4. 2di. Ergo

$dd - ff - \overline{2bn + bb} \propto cc - bb$, et per transpos.

$dd \propto cc - bb + ff - 2bn + bb$ vel

$dd \propto cc + ff - \overline{2bn + 2bb}$ vel

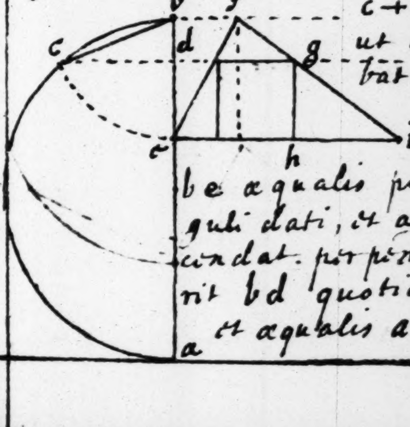
$cc + ff \propto dd + 2bn + 2bb$, sed $2bn + 2bb$ æquantur $2bf$ nam $bn + bb \propto bf$ per 3. 2di ergo $2bn + 2bb \propto 2bf$ et $cc + ff \propto dd + 2bf$ Ergo In triangulo acutangulo

Latera angulum acutum ambientia plus possunt basi duplici oblongo ex altero crure, et ejus segmento a dicto angulo ad verticis perpendicularem.

Probl. 4. Dato triangulo quadratum inscribere

Puta factum. sitque a segmentu perpendiculi inter verticem, et latus quadrati, erit $p-a$ latus quadrati.
Et erit $p.c :: a.\frac{ca}{p}$ } Ergo $\frac{ca+da}{p} \propto$
2do erit. $p.d :: a.\frac{da}{p}$ }
$p-a$, et $ca+da. \propto pp-pa$ et $ca+da+pa. \propto pp$ Ergo $\frac{pp}{c+d+p} \propto a$. quâ sublatâ a perpendiculo residuum erit latus quadrati inscribendi.

Geometrice sic. Ducatur ab aequalis $c+d+p$ et super hâc ut diametro describatur semicirculus acb, mensuretur bc cui aequatur be aequalis perpendiculo trianguli dati, et a puncto c descendat perpendicularis cd. erit bd quotiens geometricus et aequalis a. nam ab.cb.bd ÷

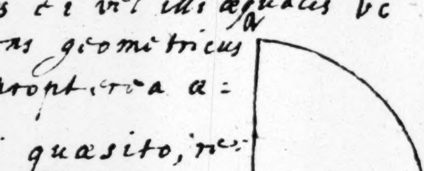


ductæ tandem ei basi trianguli æquali, et ad ba normali agantur dg, bf parallelæ, et compleatur triangulum cum inscripto quadrato

Aliter idem

Problema absolvitur. Posito a lateri quadrati inscribendi erit p−a segment. perpendiculi inter verticem trianguli, et latus quadrati. et talis invenietur æquatio

$pa+ca+da \infty c+dp$. et $p+c+d . c+d :: p . a$. et $\frac{c+dp}{p+c+d} \infty a$ et constructio priori non erit absimilis. quia vero $c+dp$ est superficies reducatur ad hh. cujus latus ei vel illi æqualis bc erit bd quotiens geometricus $\frac{hh}{p+c+d}$ et propterea a æqualis lateri quæsito, reliquis ut in schemate præcedenti.

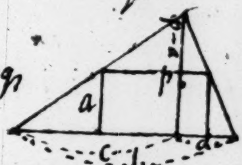


In verbis sic Divide quadratum perpendiculi per aggregatum basis, et perpendiculi quotiens

erit aequalis segmento inter trianguli verticem, et latus quadrati. vel Rectangulum, ex basi in perpend. per idē aggregatum divisum exhibebit latus quadrati quaesitum.

Probl. 5tū Dato triangulo rectangulum inscribere cujus area sit ad aream trianguli in ratione possibili data. s ad r.

Repetatur schema problem. 4ti et sit area trianguli ad quadratum reducta. mm.



Puta factum Sit q; latus unum a

Primo. $p . c :: p - a . \frac{cp - ca}{p}$ Secundo. $p . d :: p - a . \frac{dp - da}{p}$ ducantur in a. Erit $\frac{cpa - caa + dpa - daa}{p} . mm :: s . r .$ gô $smm = \frac{rcpa + rdpa - rcaa - rdaa}{p}$ vel $\frac{psmm}{r} = c + dpa$ (hoc est bpa.) $- caa - daa$ vel $\frac{psmm}{r} + c + daa$, hoc est $+ baa = bpa$. et tandem $baa = bpa - \frac{psmm}{r}$ et $aa = pa - \frac{psmm}{rb}$ vel qa r minor est b.

$aa = pa - \frac{psmm}{rb}$ Et a erit aequalis

$\sqrt{u: \frac{1}{4} pp - \frac{psmm}{rb} :} + \frac{1}{2} p = a$

$\sqrt{u:}\ \frac{1}{4}pp - \frac{psmm}{rb} : + \frac{1}{2}p \propto a.$

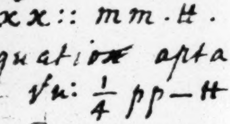
Determinatio. Absolutum datum non debet superare quadratum semissis perpendiculi. nam aliter rectangulum erit areæ majoris quam inscribi potest.

Pro constructione hujus problematis primo rb planum reducendum est ad quadratum sit illud nn. similiter reducatur ps ad quadratum sit illud xx, et loco $\frac{psmm}{rb}$ habebitur $\frac{xx.mm}{nn}$. deinde fiat. nn. xx :: mm. tt. erit $\frac{nntt}{nn} \propto \frac{xxmm}{nn}$. Et sic æquatione aptata constructioni sic stabit $\sqrt{u:}\ \frac{1}{4}pp - tt : + \frac{1}{2}p \propto a.$

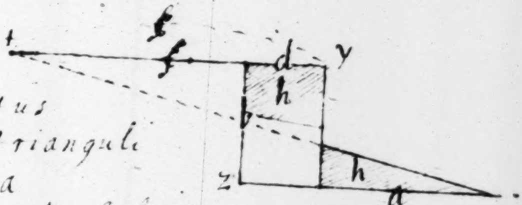
Corollarium.

Quando proportio data s, ad r est subdupla hoc est 2, ad 4 invenietur tt æqualis $\frac{1}{4}pp$. et propterea capiendam esse semissem perpendiculi pro latere rectanguli minori, dimidium basis pro majore, cujus demonstratio ex sequenti diagrammate facilius deducatur.

AC. $\propto$ areæ triang. integræ. ergo EF $\propto$ dimid.



Probl. 6tu Ex dato rectangulo y.z a puncto t itidem dato triangulum exterius abscindere aequale trapezio h. dato.



Sit latus majus trianguli ignoti a

Erit a + d + f hoc est

$a+c \,.\, b :: a \,.\, \frac{ba}{a+c}$ aequale lateri alteri trianguli ignoti, sed $\frac{baa}{a+c}$ aequatur duplo areae trianguli id est 2h. ergo $\frac{baa}{a+c} = 2h$. vel $baa = 2ha + 2hc$, et $aa = \frac{2ha+2hc}{b}$ Ergo $\sqrt{u:\ \frac{hh}{bb} + \frac{2hc}{b}} : + \frac{h}{b} = a$.

Ad effectionem geometricam hujus problematis concipiatur h superficies reducta ad quadratum tunc vice h. scribatur hh, et aequatio sic stabit $\sqrt{u:\ \frac{hhhh}{bb} + \frac{2hhc}{b}} + \frac{hh}{b} = a$ Dic [illegible] ut $bb \,.\, hh :: hh \,.\, ff$ erit $\frac{bbff}{bb} = \frac{hhhh}{bb}$. fiat secundo. ut

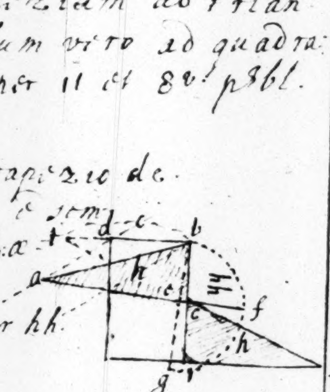
b.h :: h.f, erit $\frac{2bfc}{b} \propto \frac{2hhc}{b}$, similiter $\frac{bf}{b} \propto \frac{hh}{b}$. Sic aequatio integra constructioni apta sic stabit.

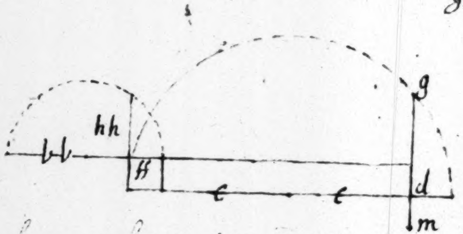
$\sqrt{u:}\ \frac{bbff}{bb} + \frac{2bfc}{b} : + \frac{bf}{b}$ vel.

$\sqrt{u:}\ ff + 2fc : + f \propto a$.

Reducitur trapezium ad triangulum, triangulum vero ad quadratum ~~tum ipsi~~ aequale per 11 et 8um probl. pag. 75 hujus.

triangulũ abc ∝ trapezio de. bc est altitudo, eg e semissis basis ergo e fq: aequatur h trapezio quod perinde vocatur hh.



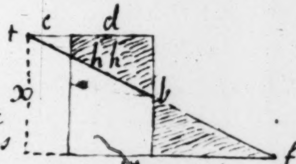


In hoc schemate apparet quod d.g e ~~aequ~~ $\sqrt{q:}\ ff + 2cf$ cui addita $dm \propto f$ dico gm. esse latus trianguli quaesitum nempe $\sqrt{u:}\ ff + 2cf : + f$. quo cognito, a puncto dato ducatur linea ts. facta prius

rs æquali gm. et triangulum crs erit triangulum quæsitum, æquale trapezio

Aliter hoc idem problema absolvitur. potius unus problematis casus

Sit a latus trianguli majoris



Erit $a+c \cdot b :: a \cdot \frac{ba}{a+c}$ lateri minori istius trianguli, et $\frac{baa}{a+c} \propto 2db$ quia cum triangulum sit æquale trapezio reliquum erit æquale residuo rectanguli.

$\frac{baa}{a+c} \propto 2db$, vel $baa \propto 2dba + 2dbc$ vel. $aa \propto 2da + 2dc$. et $\sqrt{u}: dd + 2dc: + d \propto a$.

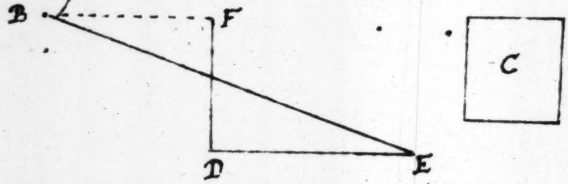
Geometrice.

$ac \propto 2d$
$ce \propto c$ ergo
$cg \propto \sqrt{q}\, 2dc$ et
bg, vel $bd \propto \sqrt{u}: dd + 2dc:$
$df \propto d$, ergo bf est quantitas quæsita.

N.B hoc problema abscindit triangulum æquale trapezio superiori per lineam f f ignotis area trapezij, vel trianguli: ideo est diversum a priori.

Problema praecedens generalius proponi potest hoc modo

Posito D angulo recto a puncto B ubicunque dato, et cognito DF, supra basin DE triangulum abscindere aequale spatio cuicunque possibili ubicunque dato C



Problem. 7^{mu} Data (mm) area trianguli aequilateri invenire latera.

Esto p perpendiculum bisecans basin. Et sit x semissis basis ergo 2x erit basis integra, et 4xx ∞ pp + xx quia triangulum e aequilaterum ergo 3x.x. ∞ pp et √q 3xx ∞ p. sed px ∞ mm ergo √q 3xx in x hoc est √q 3xxxx ∞ mm. Et, $\frac{mm\,mm}{3}$ ∞ ~~q~~ xxxx unde x facile eruitur. nam

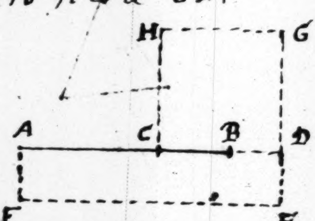
cū $\sqrt{q}$. 3xxxx ∞ mm erit etiam
aequatio inter $\sqrt{q}$ 3xxxx et $\sqrt{q}$ mmmm
et propterea etiam inter eorū quadrata
3xxxx et mmmm vel xxxx et
$\frac{mmmm}{3}$. Unde Canon sequens.

Ex tertia parte area in se multiplicatae educe radicem biquadratam quotiens exhibebit semissem lateris ~~inc~~ cogniti.

Vel qui aequatio est inter $\sqrt{q}$. $3x^4$ et $\sqrt{q}$ m^4 erit etiam aequatio inter $\sqrt{q}$. xxxx et $\sqrt{q}$ $\frac{mmmm}{3}$. Ergo
$\frac{1}{3}$ mmmm ∞ xxxx Hoc est
$\frac{mm}{3}$. xx :: xx. mm Ergo etiam
$\sqrt{q}$. $\frac{mm}{3}$. x :: x : m. Nam si quadrata sint proportionalia erunt, et radices quadrata eorum proportionales. Ergo med. proport. inter m, et $\sqrt{q}$ $\frac{1}{3}$ mm est aequale ad x semilatus trianguli aequilateri quaesiti.

Probl. 8vum. ex Geom. Descart. p. 167.

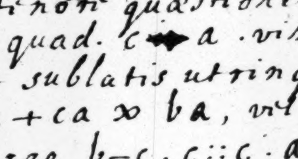
Datam rectam lineam AB utcunque sectam in C, ita producere ad D ut rectangulum sub AD, DB comprehensum æquetur quadrato rectæ CD.



Appelletur
AC. b
BC. c

Sit deinde
BD quantitas, F
incognita .a. tota igitur linea est $b+c+a$, et ex tenore quæstionis $ba+ca+aa \propto$ quad. $c+a$ .viz $aa+2ca+cc$ et sublatis utrinque $aa+ca$ erit $cc+ca \propto ba$, vel $ba-ca \propto cc$. Ergo $b-c \cdot c :: c \cdot a$. et $\frac{cc}{b-c}$ restituit a.

Problema 9nu In triangulo Rectangulo datis P perpendiculo et D dria laterum, invenire hypotenusam; i.e. 9 Oughtr. pag. 85



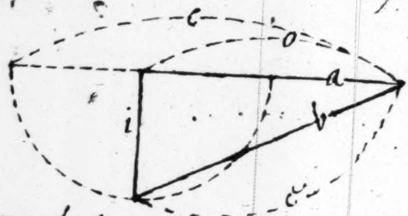
Sit hypotenusa a
Primo per 7. El. 2di $2oc + d^2 \propto o^2 + c^2$
ergo $d^2 \propto o^2 + c^2 - 2oc$ sed $o^2 + c^2 \propto a^2$
ergo $d^2 \propto a^2 - 2oc$. quia vero a.c::
o.p erit $ap \propto oc$, et $2ap \propto 2oc$; er-
$d^2 \propto a^2 - 2ap$, et etiam $a^2 \propto d^2 + 2pa$
Ergo $\sqrt{u}: p^2 + d^2: + p \propto a$

Problema . 10

Datis, s, summa laterum trian-
guli rectanguli et perpendiculari ab
angulo recto in hypotenusam, inve-
nire hypotenusam

Sit hypotenu-
sa a.
$ss. \propto cc + oo + 2oc$, sed $cc + oo \propto aa$
ergo $ss \propto aa + 2oc$, et quia, a.o::c.p
$ap \propto oc$, et $2ap \propto 2oc$, ergo $ss. \propto$
$aa + 2pa$, vel $aa \propto ss - 2pa$. Et
$\sqrt{u}: pp + ss: - p. \propto a$.

Prob. 11 Datis trianguli rectanguli summa laterum, et d̄ria segmentorum hypotenusæ invenire d̄riam laterum. Est 12. hujus p. 88



Data
c. summa laterum
b d̄ria segmentorum hypotenusæ.

Quæsitum.
a. d̄ria laterum.

Quia c. b :: c. a. Erit etiam. cc. bb :: cc. aa. nam communis multiplicator non immutat proportionem. sed, cc ∞ oo + ii per 47. 1mi. Ergo $c^2 . b^2 :: o^2 + i^2 . a^2$ et dividendo $c^2 - b^2 . b^2 :: o^2 + i^2 - a^2 . a^2$. Sed e per [illegible] vel sumendo antecedentium duplum $2c^2 - b^2 . b^2 :: 2o^2 + 2i^2 - a^2 . a^2$. Sed per 10 2di Eucl. vel. 8. 18 hujus $c^2 + a^2 \infty 2o^2 + 2i^2$ et $c^2 \infty 2o^2 + 2i^2 - a^2$. Ergo $2c^2 - b^2 . b^2 :: c^2 . a^2$. et $\sqrt{q}. 2c^2 - b^2 . b :: c . a$.

Probl. 12 Datis trianguli Rectanguli basi (r) segmento perpendiculi basi contermino (t) ~~vero~~ et angulo ad A bifariam secto invenire perpendiculum (d).

AE æ $\sqrt{q}\; rr+dd$ per 47·1^mi

Data.
r. et t
Quæsitū d.

Quia per 3^u 6^ti

$r . t :: \sqrt{q}\; rr+dd . d-t$ erit

$dr-tr \propto \sqrt{q}\; rrtt+ddtt$. et cum quadd.

$ddrr+ttrr-2tdrr \propto rrtt+ddtt$. vel

$ddrr-2tdrr \propto ddtt$, et dividendo

$drr-2trr \propto dtt$ vel per transpos. term.

$2rrt \propto rrd-ttd$ Ergo

$rr-tt : 2rr :: t . d$. Et propterea

$$\frac{2rrt}{rr-tt} \propto d$$

Et hoc est Theorema Johannis Pellij quod chartulâ impressâ per varia loca dimitti curavit, et per quod Longomontani cyclometriam confutavit. Posita enim basi trianguli pro radio erit (t) tangens arcus simpli et (d) tangens arcus dupli. Ergo Tangens cujuslibet arcus etc.

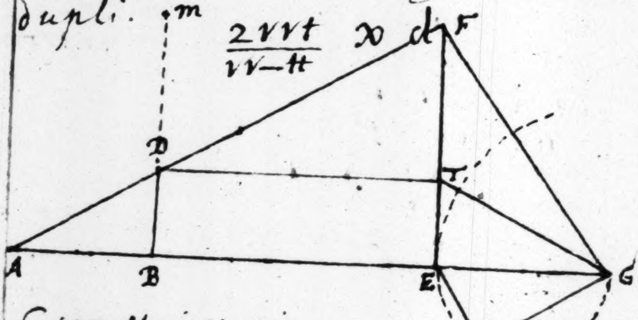
v^e Controvers. de vera circuli mens. pag. 13

Determinatio

Atqz hinc patet segmentū perpendiculi non debere radium excedere hoc est tangentem 45°. nam alias subductio nequit fieri Quod requirit, Theorema prædictum. viz.

Si Tangens cujuslibet arcus minoris quam 45°.00 ducatur in duplum quadratum radij; et a quadrato radij auferatur tangentis quadratum; et illud productum dividatur per hoc residuum: Quotus erit tangens arcus dupli.

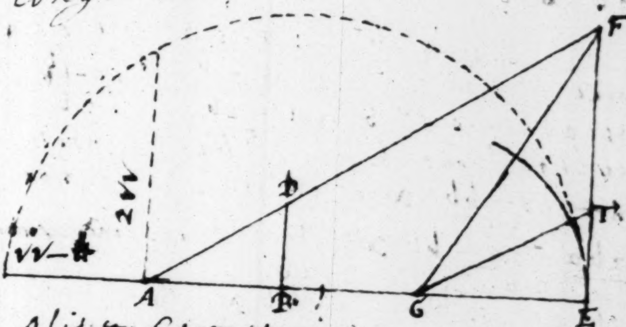
$\frac{2rrt}{rr-tt}$ x d



Geometrice sic.

Super EG radio describatur semicirculus, mensuretur EC æqualis ET erit GC latus $rr-tt$, cui æqualis statuatur AB, Bm vero sit æqualis lateri 2EGq, hoc est 2rr, inter AB,

et Bm, hoc est inter $\sqrt{q}\, vv - tt$, et $\sqrt{q}\, 2vv$ quaeratur tertia proportionalis, quae invenietur aequalis AE et per 18, 8. Eucl. $vv - tt . 2vv$ :: AB. AE, Ergo ut AB, AE :: t. d. Erigatur igitur a puncto B perpendicularis BD aequalis ET, hoc est t, cui parallela ascendat infinita EF et a puncto A per terminum D ducatur AF, erit EF aequalis d quaesitae quâ cognitâ compleatur triangulum Theoremati congruum.

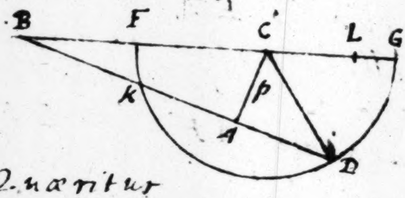


Aliter Geometrice
AB ∞ $vv - tt$. AE est tertia proportionalis inventa EG radius. BD ∞ ET EF ∞ d.

Sic data d quaeratur t. quia $ttd + 2vvt \infty vvd$. erit $tt \infty vv - \frac{2vvt}{d}$.
Ergo $\sqrt{u}: \frac{vvvv}{dd} + vv: - \frac{vv}{d} \infty t$.

Probl. 13 et 14 hujus pag. 90

Datis trianguli plani cujuscunq differentia laterum FB differentia segmentorum basis BK et differentia inter majus latus et basem CL invenire triangulum.



Data.

$BF \propto b$
$BK \propto c$
$CL \propto d$

$BG \propto f$
$CF \propto g$
$BC \propto h$

Quaeritur BD basis. Sit a.

Quia $b \,.\, c :: a \,.\, \frac{ca}{b}$ erit $\frac{ca}{b} \propto f$ erit etiam $\frac{ca}{2b} - b \propto g$. vel $\frac{ca-bb}{2b} \propto g$ et addendo $\frac{bb}{2b}$. $\frac{ca+bb}{2b} \propto h$. et subtrahendo h ex basi a. erit $a + \frac{ca-bb}{2b} \propto d$ et multiplicando $\frac{2ba - ca - bb}{2b} \propto \frac{2bd}{2b}$ ergo dividendo etiam $2ba - ca - bb \propto 2bd$ vel per terminorum transpositionem $2ba - ca \propto 2bd + bb$ Ergo $2b - c \,.\, 2d + b \,.\, b \,.\, a$.

Probl. 14. & 16. hujus.

Datis trianguli plani cujuscunque differentia laterum BF differ. segmentorum basis BK et perpendiculo p. invenire basem

Dantur.		
BF $\propto$ b	KD $\propto$ u	CD $\propto$ x
BK $\propto$ c	AD $\propto$ o	vide schema praecedens.
BA $\propto$ p	FG $\propto$ y	

Sit basis a. Quia est f . a :: c . b et $uu \propto aa+cc-2ca$ per 7. 2di Eucl. et per 47. 1mi $oo+pp \propto xx$, et $4xx \propto yy$ ergo etiam $4oo+4pp \propto yy$. sed $uu \propto 4oo$ ergo $uu+4pp \propto yy$ sed $uu \propto aa+cc-2ca$ ergo $aa+cc-2ca+4pp \propto yy$ addo y ad b. Erit $b+\sqrt{q}\, aa+cc-2ca+4pp \propto f$. quare per Theor. 16 pag 71 hujus $b . a :: c . b+\sqrt{q}\, aa+cc-2ca+4pp$. Ergo $ca \propto bb+\sqrt{q}\, aabb+ccbb-2cabb+4ppbb$. vel $ca-bb \propto \sqrt{q}\, aabb+ccbb-2cabb+4ppbb$ ergo eorum quadrata erunt etiam aequalia $ccaa+bbbb-2ca\cancel{bb} \propto aabb+ccbb-2cabb+4ppbb$ vel subtrah. 2cabb. $ccaa+bbbb \propto aabb+ccbb+4ppbb$ vel $ccaa-bbaa \propto ccbb+4ppbb-bbbb$ vel $\overline{cc-bb}\,aa \propto \overline{cc-bb+4pp}\,bb$ Ergo $\sqrt{q}\, cc-bb . \sqrt{q}\, cc-bb+4pp . b .. a$.

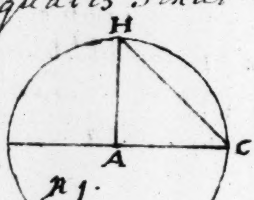
Datis trianguli plani cujuscunque duobus lateribus cum angulo comprehenso inveniri latus tertium vel datis tribus lateribus inveniri angulum comprehensū

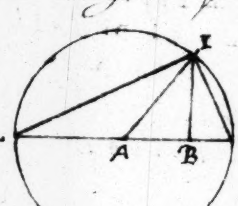
Theorema. 1mū.

Multiplica duplicatum Rectangulum sub lateribus datis in sinum versum anguli noti; factum divide per radium quotienti adde quadratum driæ laterum: hujus aggregati radix quadrata erit latus incognitum.

Theorema. 2du

Differentia quadratorū lateris oppositi dato angulo, et driæ laterū ducatur in Radium; hoc factū dividatur per duplicatum Rectangulum sub lateribus Quotus erit æqualis sinui verso anguli quæsiti.





Demonstratio.

Hæc Theoremata varios admittunt casus. Triangulum enim erit vel Rectangulum æquicrurum, vel obliquangulum æquicrurum vel deniqz scalenum.

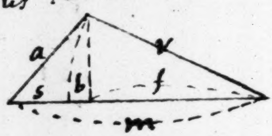
Sit primo triangulum æquicrurũ rectangulum cujus sinus versus e radius dicta vero laterum oo. In schemate XI. sit AC vel AH ∞ v factũ igitur laterum est vv duplicatũ rectangulum sub lateribus 2vv sinus versus v. ergo $\frac{2vvv}{v}$ hoc est 2vv est duplicatũ rectangulum sub lateribus in sinũ versũ per radium divisũ sed 2vv ∞ HCq per 47 1mi et √q 2vv ∞ HC quod est Theorema primũ. vel $\frac{2vvv}{2vv}$ ∞ v sinui verso anguli quæsiti. Theo. 2dũ

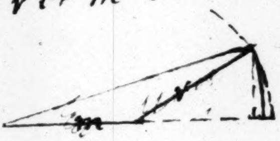
Secundo sit triangulum acutang. æquicrurũ IAC cujus sinus versus BC vocetur b) ergo duplicat. rectang. sub lateribus in sin. vers. per rad. divisũ est $\frac{2vvb}{v}$ ∞ ICq vocetur cc. vel 2vb ∞ cc nam LC. ∞ 2v. IC ∞ c :: c. b quia triangg. LIC. IBC sunt simil; ideo √q $\frac{2vvb}{v}$ ∞ c. quod e Theor. primũ vel itidem quia $\frac{2vvb}{v}$ ∞ cc hoc

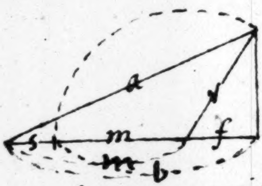
$2vvb \infty ccv$ vel $\frac{ccv}{2vv} \infty b$ quod est Theorem. 2dū.

Porro quia $2vb \infty cc$ quod prius demonstratū est erit $vq\ 2vb \infty c$ vel $\frac{cc}{2v} \infty b$ idem etiam demonstrari potest de triangulo obtusangulo nam triangg LIC et LIB simil. LAI

Tertio sit triangulū obliquang ulum scalenum. Radio v, erit b sinus versus anguli comprehensi a duobus lateribus notis vel m et erit s differentia laterum, a vero latus incognitum







Primo et in schemate primo $v - b \infty f$ sed $mm + vv \infty 2mv + ss$ per 7. 2di, et etiam $mm + vv \infty aa \mp 2mf$ per 13 2di ergo etiam $2mv + ss \infty aa \mp 2mf$ Ergo $2mv + ss \mp 2mf \infty aa$ sed $2mv \mp 2mf \infty 2mb$ ergo $2mb + ss \infty aa$ vel $\frac{2mbr}{v}$ + ss ∞ aa quod ē Theor. 1mū vel $2mbr \infty aa$ r- quia $\frac{2mbr}{v} \infty aa - ss$ erit $2mbr \infty aar$–

ssv Ergo etiam $\frac{aav-ssv}{2mv} \propto b$ quod est Theor. 2dū

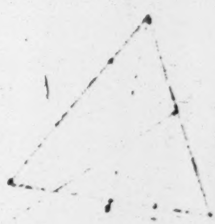
Quia vero $2mb\ \cancel{+}\ ss \propto aa$ Theorema 1mū sic potest proponi

Si facto ex latere majore dato duplicato in sinū versum ducto addatur quadratum drĩæ laterū aggregati radix quadrata erit latus ~~incognitum~~ quæsitum

Secundo quia $\frac{aav-ssv}{2mv} \propto b$

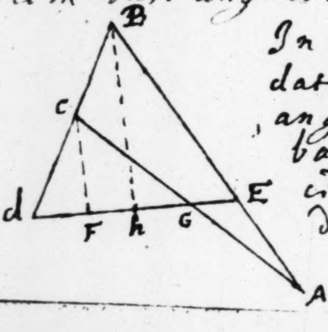
Erit etiam $\frac{aa-ss}{2m} \propto b$ Et Theorema secundū sic potest proponi

Si Quadratum lateris angulo noto oppositi minuatur quadrato drĩæ laterū hoc residuum divisum per latus majus duplicatum exhibebit sinum versum anguli quæsiti.



Datis (b) basi trianguli plani (c) summa crurum cū (d) angulo verticis acuto, vel obtuso inveniri latera, et ipsū triangulum

Fiat triangulum æquicrurū dBE habens angulum verticis æqualem dato et unumquodqz crus circa angulum æqualem semissi summæ datæ. Manifestum est nihil simplicius requiri posse ad solutionem hujus problematis quam ut innotescat portio, puta CB, quæ ab altero crure abscindi et in aliud transferri debet qua inventâ satisfit problemati. Unde pateat in hoc casu triangulum æquicrurū supplere vicem dati anguli.



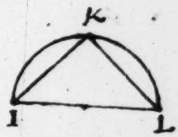
In triangulo hoc datis lateribus cum angulo incluso datur basis per Theor. 5 eidem igitur et ejus dimidium dh, vel

h, &c. fiat FG æqualis dh, et CG ∞ dimidio basis datæ, et inquiratur dc vel brevius CF.

Data   Quæritur

$\left.\begin{array}{l} GF \infty b \\ GC \infty c \end{array}\right\}$ CF ∞ a. Quia vero CC ∞ bb + aa erit aa ∞ cc − bb.

Si igitur super data basi bifariam sectæ ut diametro scribatur semicirculus, a cujus altero termino accomodetur in semicirculum IK ∞ semissi basis trianguli æquicruri ducta LK erit perpendiculum quæsitum quod in basem dc dimissum ostendet punctum c a quo ducenda est basis cA facta EA ∞ cd. si vero ulterius inquiratur quot partium sit cd dimisso perpendiculo Bh. Erit Bh. Bd :: CF. cd.



Geometrice

LI e $\frac{1}{2}$ basis. c

IK e ∞ dh. b

LK e $\sqrt{q}$. cc − bb ∞ CF quæsit.

Problema 16. Discartes geom. 4. pag 168.

Data rectâ lineâ terminata AB ex terminis ejus A et B duas rectas lineas inflectere AC, CB continentes angulum ACB aequalem dato D, ut quae ab ipsis fiunt quadrata, habeant ad triangulum ACB rationem datam, ut 4d ad a.

Primo quia angulus D datur dantur etiam FD et FG anguli vicem suplentia quibus qualibet ad libitū quantitas assignari poterit. fiat igitur triangulum rectangulum ACI simile triangulo rectangulo GFD

Quantitates datae. Quantit. quaesitae

AE $\frac{1}{2}$AB. ∞ a — HE ∞ x

DF ∞ b — HC ∞ y

GF ∞ c

Puta factum quod postulatur quia HE ∞ x, et AE ∞ a erit

AH ∞ a−x } ACq ∞ aa−2ax+xx+yy } Sūma

HB ∞ a+x } CBq ∞ aa+2ax+xx+yy } quadd.

ACq+CBq ∞ 2aa+2xx+2yy. et ex tenore quaestionis 2aa+2xx+2yy. ya :: 4d . a. Ergo 2aaa+2xxa+2yya ∞ 4dya. Prima Aequatio.

Secundo Triangg. ACI, GFD etiam HCB, et ABI sunt similia. Ergo $\left.\begin{array}{l} CB.AB :: CH.AI \\ CB.AB :: BH.BI \end{array}\right\}$ $CBq \propto$

$aa+2ax+xx+yy$ vocetur ee. $AB \propto 2a$.

Ergo. $e.2a :: y.\ \frac{2ay}{e} \propto AI$ etiam

$e.2a :: a+x.\ \frac{2aa+2ax}{e} \propto BI$ et subducta

e. erit $\frac{2aa+2ax-ee}{e} \propto CI$. jam $CI.AI :: DF.FG$

hoc est $\frac{2aa+2ax-ee}{e}.\ \frac{2ay}{e}$ vel

$2aa+2ax-ee : 2ay :: b.c.$ et

$2aac+2axc-eec \propto 2ayb$. Secunda æquat.

Prima æquatio. $2aaa+2xxa+2yya \propto 4dya$

vel $aa+xx+yy \propto 2dy$ vel

$xx \propto 2dy-aa-yy$. primæ æquat. reducta

Secunda æquatio restituto valore ee erit

$2aac+2axc-aac-2axc-xxc-yyc \propto 2ayb$

vel $aac-xxc-yyc \propto 2ayb$ et $xx \propto aa-yy-\frac{2aby}{c}$

$xxc \propto aac-yyc-2ayb$.

vocetur $\frac{2ab}{c}$. $2f$ Ergo $\left.\begin{array}{l} xx \propto aa-yy-2fy \\ xx \propto 2dy-aa-yy \end{array}\right\}$ Ergo

$aa-yy-2fy \propto 2dy-aa-yy$ vel $2aa-2fy \propto 2dy$

et $dy \propto aa-fy$ vel $dy+fy \propto aa$ ergo $\frac{aa}{d+f} \propto y$

Ergo $yy \propto \frac{aaaa}{dd+2df+ff}$ Ergo

$xx \propto \frac{2daa}{d+f} - \frac{aaaa}{dd+ff+2df} - aa$ vel $xx \propto$

$$\frac{2ddaa+2dfaa-aaaa-aaff-2dfaa-ddaa}{dd+ff+2df}.$$

vel subductis $dd+2df$. $\Big\}$ $xx \propto \frac{ddaa-aaff-aaaa}{dd+2df+ff}$ et

$$\sqrt{u:\ \frac{ddaa-aaff-aaaa}{dd+2df+ff}} \propto x$$

Ad constructionem hujus problematis supponatur (1) recta secta in d et f, deinde loco $dd + 2df + ff$ scribatur ll et

$xx \propto \dfrac{ddaa - aaff - aaaa}{}$ et faciendo $ll.dd :: aa.nn.^{ll}$ erit $nn \propto \dfrac{ddaa}{ll}$ eodem prorsus modo invenietur $vv \propto \dfrac{aaff}{ll}$ et $ss \propto \dfrac{aaaaa}{ll}$ et $xx \propto nn - vv - ss$

Et $x \propto \sqrt{u:\, nn - vv - ss}$ Unde liquet (si post adimpletas omnes conditiones) requisitas subductio nequit fieri problema esse impossibile

Atq3 hinc patet methodus solvendi problema illud

Data basi altitudine et angulo verticis invenire triangulum. Vieta pag 341.

Nam in triangulo Obtusangulo posito $HE \propto x$ invenietur ~~xx ∞~~

$xx \propto aa - yy - 2ayb$ in acutangulo

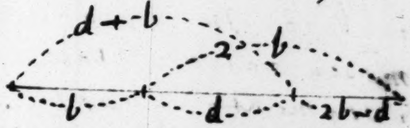
$xx \propto 2ayb + aa - yy$. Et problema sic potest proponi.

Super data basi in altitudine datâ duas lineas inflectere continentes angulum aequalem dato.

Exhibet revera triangulum Vieta methodo facillima quantitates vero laterum non innotescunt ut in nostrâ et propterea nescio an Vieta Invenit triangulum

Probl. 17. Invent. 1^mi Elem. 13 Euclidis.

Si recta 2b secetur extrema et media ratione major potio d continuata dimidio totius b quantum plus potest quam potest b in quinere.



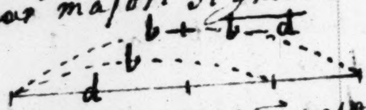
Quia linea ponitur secta extrema, et media ratione 2b-d in 2b hoc est
$4bb - 2bd \propto dd$ ergo
$4bb \propto dd + 2bd$ addatur utrinque bb
$dd + 2bd + bb \propto 5bb$ Ergo
Majus segmentum continuatum dimidio totius potest quintuplum ejusdem dimidij.

Prob. 18. Sit jam majus segmentum $2d$ ejus dimidiu d minus segmentu $2b - 2d$ et $4bb - 4bd \propto 4dd$. Sed minor portio continuata dimidio majoris e $2b - 2d + d$ hoc e $2b - d$ ejus quadratu $4bb - 4bd + dd$. sed $4bb - 4bd \propto 4dd$ Ergo $4dd + dd$ hoc e $5dd \propto 4bb - 4bd + dd$. Et minus segmentu continuatu dimidio majoris potest quintuplu ejusdem dimidij in linea secta extrema et media ratione.

Consectarium

Hinc sequitur quod minus segmentū rectæ proportionaliter sectæ est majus segmentum majoris proportionaliter secti

Probl. 18. In lineâ sectâ extremâ et mediâ ratione tota continuata minori segmento quantū plus potest ~~majus~~ majori segmento invenire



$b + b - d$ quantū potest inquirere

$$\begin{array}{l} b + b - d \\ b + b - d \\ \hline bb + bb - bd \\ \qquad bb + bb - bd \\ \qquad\; - bd - bd + dd \quad \text{facit} \\ \hline \end{array}$$

$4bb - 4bd + dd$. Sed quia $bb - bd \infty dd$ ergo. $4bb - 4bd \infty 4dd$, et $4dd + dd$ hoc ē $5dd \infty 4bb - 4bd + dd$ Ergo tota cū minori segmento adjuncto potest 5tuplū majoris. hinc.

Si duplum majoris segmenti secetur extremâ et media ratione majus segmentū erit reliqua pars lineæ a principio sectæ.

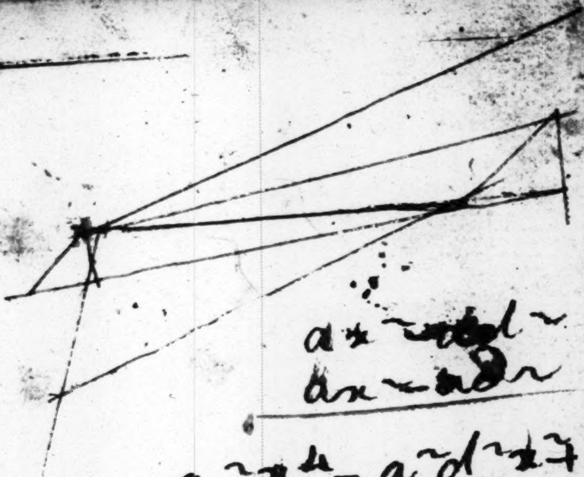
Sit jam major numerus a.
Minor erit - $a-1$
Summa $2a+1 \cdot \infty$ differentiæ quadratorū
Quadratur $2a-1$.

$4aa-4a+1 \cdot \infty Zq \cdot$ Quadratū summæ
$2aa-2a+1 \infty Z$. summæ quadratorū

$\flat$nū $2aa-2a \infty \cdot 40$. ergo.
$2aa \cdot \infty 40+2a$. et
$\sqrt{u}: 80+1: \pm 1 \infty$ duplo majoris / duplo minoris numeri ergo numeri quæsiti sunt 5, et 4.

Theorema

Si duplo residuo dato addatur unitas. hujus aggregati radix quadrata aucta unitate erit dupla majoris numeri, minuta vero unitate erit dupla minoris numeri.



$$ax^2 - ad^2$$

$$ax^2 - ad^2$$

$$a^2x^4 - a^2d^2x^2 + a^2d^4$$

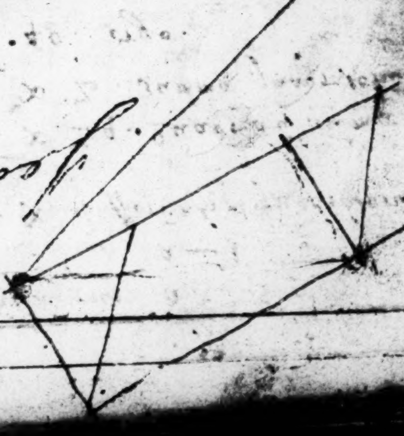
$$-a^2d^2x^2$$

$$a^2x^4 - 2a^2x^2d^2 + a^2d^4$$

$$b - x$$

$$x - b$$

$$p - x$$



Jean Merce

11	12	13	14
Aqccc	Acccc	Aqqccc	Aqcccc
11AqqccE	12AqcccE	13AccccE	14AqqcccE
55AcccEq	66AqqccEq	78AqcccEq	91AccccEq
165AqccEc	220AcccEc	286AqqccEc	364AqcccEc
330AqqcEqq	495AqccEqq	715AcccEqq	1001AqqccEqq
462AccEqc	792AqqcEqc	1287AqccEqc	2002AcccEqc
462AqcEcc	924AccEcc	1716AqqcEcc	3003AqccEcc
330AqqEqqc	792AqcEqqc	1716AccEqqc	3432AqqcEqqc
165AcEqcc	495AqqEqcc	1287AqcEqcc	3003AccEqcc
55AqEccc	220AcEccc	715AqqEccc	2002AqcEccc
11AEqqcc	66AqEqqcc	286AcEqqcc	1001AqqEqqcc
Eqccc	12AEqccc	78AqEqccc	364AcEqccc
	Ecccc	13AEcccc	91AqEqqccc
		Eqqccc	14AEqqcccc
			Eqcccc